Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid

SS 2011

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 11.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Geben sie entweder einen Beweis im Sequenzenkalkül oder eine falsifizierende Interpretation an.

(i) $(X \rightarrow Y), (Z \rightarrow Y) \;\Rightarrow\; (X \vee Z), \neg Y$;

(ii) $(X \vee Y),\ Y \rightarrow (Z \vee X) \;\Rightarrow\; X,\ Z$.

(b) Zeigen Sie, dass die Cut-Regeln $(\wedge \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \wedge)$ des aussagenlogischen Sequenzenkalküls korrekt sind, das heißt: Sind alle Prämissen gültig, so ist auch die Konklusion gültig.

$$(\wedge \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei $\downarrow$ der logische Junktor für NOR, definiert durch $\mathfrak{I} \models (\varphi \downarrow \psi)$ gdw. $\mathfrak{I} \not\models (\varphi \vee \psi)$.

(a) Geben Sie die Schlussregeln $(\downarrow \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \downarrow)$ an, die Ihnen erlauben, den Junktor $\downarrow$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion einzuführen (analog zu den Schlussregeln $(\vee \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \vee)$ für $\vee$) und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.

(b) Konstruieren Sie einen Beweis für die Sequenz

$$\neg((X \downarrow Y) \downarrow \neg Z) \;\Rightarrow\; (Z \rightarrow \neg X) \wedge (Z \rightarrow \neg Y)$$

in dem um die Schlussregeln $(\downarrow \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \downarrow)$ erweiterten Sequenzenkalkül.

Aufgabe 3 10 Punkte

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (wir schreiben $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(1) $A \subseteq B$,

(2) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle n-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ gilt $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ und

(3) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle n-stelligen Funktionssymbole $f \in \tau$ gilt $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} |_{A^n}$, d. h. $f^{\mathfrak{A}}$ ist die *Restriktion* von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A.

Sei weiterhin $\mathfrak{B}$ eine Struktur und $M \subseteq B$ eine Teilmenge des Universums. Die von M *erzeugte* Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist die kleinste Struktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $M \subseteq A$.

Betrachten Sie die Boolesche Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{BA}(\mathbb{N}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, {}^{-}, \emptyset, \mathbb{N}).$$

Welche Substrukturen werden von folgenden Teilmengen erzeugt?

(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(b) Die Menge aller unendlichen Intervalle $(n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}$.

(c) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement ebenfalls unendlich ist.