Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid

SS 2011

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 18.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, N^{\mathfrak{R}})$ der Signatur $\tau = \{+, \cdot, N\}$, mit der üblichen Addition und Multiplikation sowie $N^{\mathfrak{R}} = \mathbb{N}$. Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in $\mathrm{FO}(\tau)$ aus. Achten Sie dabei auf die freien Variablen Ihrer Formeln.

(a) $x = 0$.

(b) $x > y$.

(c) x ist eine irrationale Zahl.

(d) x ist Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad höchstens 5.

(e) x ist eine Primpotenz, d.h. $x = p^n$ für eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 10 Punkte

Ein unendliches Wort über einem endlichen Alphabet Σ ist eine unendliche Folge $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\dots$, so dass $\alpha(i) \in \Sigma$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ bezeichnen wir mit Σ^ω. Jedes $\alpha \in \Sigma^\omega$ kann kann durch die *Wortstruktur* $\mathfrak{W}_\alpha = (\mathbb{N}, <, (P_a)_{a\in\Sigma})$ kodiert werden, wobei $P_a = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = a\}$. Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\})$ definiert dann die *ω-Sprache* $L(\varphi) := \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathfrak{W}_\alpha \models \varphi\}$.

(a) Beschreiben Sie die durch folgende Sätze definierten ω-Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

  (i) $\varphi_0 := \forall x \exists y (x < y \land (P_a x \to P_b y) \land (P_b x \to P_a y))$;

  (ii) $\varphi_1 := \exists x \forall y ((x < y \to \neg P_a y) \land (y < x \to \neg P_c y))$.

(b) Geben Sie FO-Sätze an, welche folgende ω-Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ definieren:

  (i) $\{(aba)^\omega\} = \{abaaba\dots\}$;

  (ii) die Sprache der ω-Wörter über Σ, die wenn sie ein a enthalten auch unendlich viele b enthalten.

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir betrachten eine endliche Signatur τ.

(a) Sei $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ eine Menge von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen und

$$\Phi' := \{\varphi_0\} \cup \{\, (\varphi_0 \land \dots \land \varphi_{n-1}) \to \varphi_n \;:\; n > 0\,\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi')$.

(b) Eine Menge Φ von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen heißt *glatt*, wenn keine Struktur mehr als einen Satz aus Φ verletzt, d.h. wenn für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt $|\{\varphi \in \Phi \;:\; \mathfrak{A} \not\models \varphi\}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass jede FO-axiomatisierbare Klasse auch ein glattes Axiomensystem hat.