Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2011

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 25.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Seien E und R zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Formen Sie folgende Formeln in Negations-, Pränex- und Skolem-Normalform um.

(a) $\psi := [\forall x \exists y Exy \wedge \exists x \forall y \forall z (Exy \wedge Exz \rightarrow y = z)] \rightarrow \forall x Exfyx.$

(b) $\varphi := \forall y[\exists z(Exz \wedge \neg Eyz) \rightarrow \exists x(Efxyz \wedge \forall y Rxy)].$

Aufgabe 2

10 Punkte

Sei $\mathcal{K} := (S, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem (s. Skript, Kap. 2, S. 42). Geben Sie FO-Formeln an, welche ausdrücken, dass

(a) x keinen a-Vorgänger hat, an dem Q gilt und P nicht;

(b) es von y nach x einen a-Pfad der Länge höchstens 100 gibt, auf dem abwechselnd P und $\neg P$ gelten;

(c) jeder Zustand, an dem $\neg P$ und Q gilt, in maximal drei Schritten von genau zwei verschiedenen Zuständen erreicht werden kann, an denen jeweils $\neg Q$ gilt.

Hinweis: Führen Sie Hilfsformeln ein!

Aufgabe 3

10 Punkte

Sei τ eine relationale Signatur (d.h. τ enthält keine Funktionssymbole), und sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots$ eine *Kette* von τ-Strukturen. Wir definieren eine τ-Struktur $\mathfrak{A}_\omega$, so dass $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wie folgt:

$$A_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\,,$$
$$R^{\mathfrak{A}_\omega} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n} \quad \text{für alle Relationssymbole } R \in \tau.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Sätze der Form $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta \in \mathrm{FO}(\tau)$ (mit quantorenfreiem η) *unter Vereinigung von Ketten abgeschlossen sind*, d.h. wenn $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$.

(b) Zeigen Sie, dass (a) nicht für beliebige Sätze $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt.

(c) Sei $\mathcal{K}$ die Modellklasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element enthalten. Geben Sie ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ kein Axiomensystem aus Sätzen der Form $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_r \exists y_1 \ldots \exists y_s \eta$ (mit quantorenfreiem η) besitzt.