Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2011

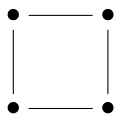
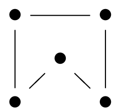
8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 08.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Betrachten Sie folgende Strukturen. Was ist die kleinste Zahl m mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$? Geben Sie eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(a) $\mathfrak{A} :=$  und $\mathfrak{B} :=$ 

(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \{5\}, \{7\})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +, \{5\}, \{11\})$, wobei $+$ der Graph der Addition (also eine Relation) ist;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, |, \{11\})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, |, \{13\})$.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Wir betrachten die Struktur $(\{0,1\}^{16}, +)$, wobei $\{0,1\}^{16}$ die Menge der Bitsequenzen der Länge 16 ist und $+$ die bitweise Addition modulo 2 (also ohne Übertrag) ist. Zeigen Sie, dass die Menge der Bitsequenzen, in denen die ersten 8 Elemente Nullen sind, nicht elementar definierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen in der Struktur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \cdot, P, f)$ elementar definierbar sind. Dabei sind $\cdot$ die elementweise Multiplikation, $P = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \geq 1, b > 1\}$ und $f((a, b)) = (a, 0)$ für alle $a \in \mathbb{R}$:

(i) die einstellige Relation $\{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$;

(ii) die lexikographische Ordnung $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow (a < c)$ oder $(a = c$ und $b < d)$.

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Sei φ ein $\mathrm{FO}(\tau)$-Satz. Das *Spektrum von* φ ist definiert als

$$\mathrm{spec}(\varphi) := \{n \in \mathbb{N} \ : \ \text{ex. } \tau\text{-Struktur } \mathfrak{A} \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } |A| = n\}.$$

Da das Universum einer Struktur stets nichtleer ist, betrachten wir ausschließlich Mengen $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Spektren.

(a) Zeigen Sie:

(i) $\emptyset$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind jeweils das Spektrum eines $\mathrm{FO}(\emptyset)$-Satzes.

(ii) Jede endliche Menge ist Spektrum eines $\mathrm{FO}(\emptyset)$-Satzes.

(iii) Jede co-endliche Menge ist Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes. Dabei heißt eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ co-endlich, wenn das Komplement $\mathbb{N} \setminus A$ von A endlich ist.

(b) Geben Sie einen Satz über einer geeigneten Signatur τ an, dessen Spektrum die Menge der geraden Zahlen ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es erfüllbare Sätze φ mit $\text{spec}(\varphi) = \emptyset$ gibt.