Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid

SS 2011

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 22.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Betrachten Sie folgende Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(i) $\mathfrak{A}_1 := (\{1,2,3,4\}, <)$;
(ii) $\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <)$;
(iii) $\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <)$;
(iv) $\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <)$.

Dabei bezeichnet $(\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <)$ die geordnete Summe der Ordnungen $(\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{Z}, <)$, d.h. diejenige Struktur mit Univserum $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\})$ und mit $(n, \sigma) < (m, \sigma)$ genau dann, wenn $n < m$ sowie $(n, 0) < (m, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Klasse aller Graphen, in denen jeder Knoten, der keinen Vorgänger hat unendlich viele direkte Nachfolger hat, FO-axiomatisierbar ist. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass diese Klasse nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist. Eine lineare Ordnung ist diskret, wenn jedes Element a, das Nachfolger (Vorgänger) hat, auch einen kleinsten (größten) Vorgänger (Nachfolger) b hat, d.h. für kein c gilt $a < c < b$ ($b < c < a$).
Hinweis: Zeigen sie mit Hilfe des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass je zwei diskrete lineare Ordnungen ohne Endpunkte elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4 10 Punkte

Welche der folgenden Theorien sind vollständig?

(a) Die Theorie von $(\mathbb{N}, +)$;

(b) die Theorie der Klasse aller τ-Strukturen $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ für eine feste τ-Struktur $\mathfrak{A}$;

(c) die Theorie der Graphen mit 4 Knoten;

(d) die Theorie der linearen Ordnungen mit genau 17 Elementen;

(e) die Theorie der abzählbar unendlichen Cliquen;