Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid

SS 2011

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 13.07. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.

(a) Die Klasse aller unendlichen linearen Ordnungen;

(b) Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen;

(c) Die Klasse aller unendlichen dichten linearen Ordnungen;

(d) Die Klasse aller Graphen, die einen zu $(\mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \subsetneq)$ isomorphen Subgraphen enthalten;

(e) Die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Strukturen $(T, \preceq)$ wobei $T \subseteq \{0,1\}^*$ eine präfix-abgeschlossene Menge von Wörtern ist und

$$x \preceq y \;:\text{gdw. } y = xz \text{ für ein } z \in \{0,1\}^*.$$

Die Struktur $(T, \preceq)$ identifizieren wir mit einem Baum, wobei das leere Wort die Wurzel des Baumes ist und es eine Kante zwischen den Knoten $w, v \in T$ gibt wenn $v = w0$ oder $v = w1$ ist.
Überprüfen sie, ob für die folgenden Teilklassen jeweils eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ existiert, so dass für alle $\mathfrak{T} \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\mathfrak{T} \models \Phi \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{T} \in \mathcal{K}_i\,.$$

Beweisen sie jeweils ihr Antwort.

(a) $\mathcal{K}_a$: die Klasse aller Bäume, die einen unendlichen Pfad enthalten.

(b) $\mathcal{K}_b$: die Klasse aller Bäume ohne unendliche Pfade.

(c) $\mathcal{K}_c$: die Klasse aller Bäume mit höchstens endlich vielen unendlichen Pfaden.

Aufgabe 3 10 Punkte

Im Beweis der Vollständigkeitssatzes wurden im Abschnitt über Hintikka-Mengen nur Mengen von reduzierten Sätzen betrachtet (also Sätze, die aus den Atomen nur mittels $\vee, \neg$ und $\exists$ aufgebaut sind).
Wir erlauben nun auch die Verwendung von $\wedge, \rightarrow$ und $\forall$. Welche Abschlusseigenschaften muss ein Paar von Satzmengen Γ^*, Δ^* zusätzlich zu den Eigenschaften (1) – (5) aus Lemma 4.15 erfüllen, um zu garantieren, dass $\Gamma^* \cup \neg\Delta^*$ ein Modell besitzt?