Aufgabe 1 20 Punkte

Beantworten Sie die Fragen durch deutliches Ankreuzen der Kästchen. Für jede richtige ja/nein-Antwort erhalten Sie einen Punkt; für die Antwort „weiß nicht“ erhalten Sie einen halben Punkt.

(a) Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

	ja	nein	weiß nicht
Die Menge aller 2-stelligen Booleschen Funktionen ist funktional vollständig.	☐	☐	☐
Zu jeder aussagenlogischen Horn-Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel in DNF.	☐	☐	☐
Ist φ eine AL-Formel in KNF, so dass die leere Klausel aus $K(\varphi)$ durch Einheitsresolution ableitbar ist, so ist φ unerfüllbar.	☐	☐	☐
Eine aussagenlogische Horn-Formel φ ist genau dann unerfüllbar, wenn die leere Klausel aus $K(\varphi)$ durch Resolution ableitbar ist.	☐	☐	☐

(b) Seien $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$. Welche der folgenden Aussagen treffen immer zu?

	ja	nein	weiß nicht
Wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Psi \models \varphi$ für alle Ψ mit $\Phi \cap \Psi = \Psi$.	☐	☐	☐
Wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Psi \models \varphi$ für alle Ψ mit $\Phi \cap \Psi = \Phi$.	☐	☐	☐
Wenn $\Phi \Rightarrow \Psi$ eine gültige Sequenz ist, dann ist $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar.	☐	☐	☐
Wenn $\Phi \Rightarrow \Psi$ eine falsifizierbare Sequenz ist, dann ist $\Phi \cup \{\neg\psi \mid \psi \in \Psi\}$ erfüllbar.	☐	☐	☐
Ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar, so ist Φ erfüllbar.	☐	☐	☐
Ist jede endliche Teilmenge von Φ unerfüllbar, so ist Φ unerfüllbar.	☐	☐	☐

(c) Welche der folgenden FO-Sätze gelten in der jeweiligen Struktur?

	ja	nein	weiß nicht
$\exists x((0 < x) \land \forall y(0 < y \to x < y))$ in $(\mathbb{R}, <, 0)$.	☐	☐	☐
$\forall a \forall b \forall c(a \neq 0 \to (\exists x(a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0))$ in $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0)$.	☐	☐	☐
$\forall x \exists y(y \cdot y = x)$ in $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \cdot)$ mit komponentenweiser Multiplikation $\cdot$.	☐	☐	☐

(d) Welche Aussagen treffen zu?

	ja	nein	weiß nicht
Zu jeder FO-Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel in Negationsnormalform.	☐	☐	☐
Zu jeder FO-Formel gibt es genau eine logisch äquivalente Formel in Pränex-Normalform.	☐	☐	☐
Zu jeder FO-Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel in Skolem-Normalform.	☐	☐	☐

(e) Gegeben seien τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für eine relationale Signatur τ. Welche der folgenden Aussagen treffen immer zu?

	ja	nein	weiß nicht
Ist $\tau = \emptyset$, so gewinnt die Duplikatorin $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.	☐	☐	☐
Gewinnt die Duplikatorin $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $m \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.	☐	☐	☐
Gilt $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, so gewinnt die Duplikatorin $G_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle $k \leq m$.	☐	☐	☐
Gibt es eine FO(τ)-Formel φ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$, so gewinnt der Herausforderer das EF-Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.	☐	☐	☐

Aufgabe 2 18 Punkte

(a) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{U \vee V \vee \neg Y, Y \vee U \vee W, Y \vee \neg V \vee W, W \vee \neg V \vee L, \neg W \vee L, \neg U\} \models \neg(L \to U).$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Formeln jeweils, dass sie zu einer Horn-Formel äquivalent sind.

(i) $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z)$

(ii) $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Z) \wedge \neg Y$

(c) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln aus der Vorlesung an, um die Gültigkeit der folgenden Folgerungsbeziehung nachzuweisen.

$$\{X \wedge Y \to Z, A \wedge B \to X, Z \wedge C \to A, C \wedge A \to B\} \models (Z \to Y) \vee (C \to X)$$

Aufgabe 3 15 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Schlussregeln korrekt sind.

(a) $\dfrac{\Gamma,\ \neg\psi \Rightarrow \Delta,\ \neg\varphi}{\Gamma,\ \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta,\ \psi}$;

(b) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi,\ \neg\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ (\varphi \to \psi) \to \vartheta \Rightarrow \Delta,\ \vartheta}$;

(c) $\dfrac{\Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma,\ \vartheta \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi \to \psi \wedge \vartheta}$.

Aufgabe 4 18 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot, D, f)$, wobei $+$ und $\cdot$ die komponentenweise Addition bzw. Multiplikation seien. Ferner sei $D = \{(a, a) \ :\ a \in \mathbb{R}\}$ die Diagonale in der reellen Ebene und f sei eine einstellige Funktion. Konstruieren Sie Formeln $\varphi_1, \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y, z) \in \mathrm{FO}(+, \cdot, D, f)$ mit

(i) $\mathfrak{A} \models \varphi_1$ genau dann, wenn $f(D) = D$.

(ii) $\mathfrak{A} \models \varphi_2(a, b)$ genau dann, wenn $b = (b_1, b_2)$ rechts oberhalb von $a = (a_1, a_2)$ liegt, d.h. $b_1 \geq a_1$ und $b_2 \geq a_2$.

(iii) $\mathfrak{A} \models \varphi_3(a, b, c)$ genau dann, wenn a, b und c auf einer Geraden liegen.

(b) Wir betrachten folgende Strukturen:

$$\mathfrak{A}_1 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, D^{\mathfrak{A}_1}) \quad \text{mit } D^{\mathfrak{A}_1} := \{(a,a) \ : \ a \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$
$$\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, D^{\mathfrak{A}_2}) \quad \text{mit } D^{\mathfrak{A}_2} := \{(a,a) \ : \ a \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$$
$$\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, D^{\mathfrak{A}_3}) \quad \text{mit } D^{\mathfrak{A}_3} := \{(a,a) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$$

Dabei sei $+$ jeweils die komponentenweise Addition. Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i < j$ jeweils, dass es einen Satz $\varphi_{ij} \in \mathrm{FO}(+, D)$ gibt, mit $\mathfrak{A}_i \models \varphi_{ij}$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_{ij}$.

Aufgabe 5 14 Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \emptyset, U)$, wobei $\emptyset$ die leere Menge sei und U die Menge

$$U = \{M \subseteq \mathbb{N} \ : \ M \text{ hat unendlich viele Elemente}\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass sie in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar sind.

(a) $\{M \subseteq \mathbb{N} \ : \ M \text{ ist unbeschränkt}\}$.

(b) $\{Q\}$, wobei Q die Menge aller Quadratzahlen sei.

(c) $\{M \subseteq \mathbb{N} \ : \ M \text{ ist unendlich und } \mathbb{N} \setminus M \text{ ist unendlich}\}$.

Aufgabe 6 15 Punkte

Eine lineare Ordnung $(A, <)$ heißt diskret, wenn jedes Element, welches nicht maximal ist, einen direkten Nachfolger hat und jedes Element, welches nicht minimal ist, einen direkten Vorgänger hat. Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils, dass sie $\mathrm{FO}(<)$-axiomatisierbar beziehungsweise endlich $\mathrm{FO}(<)$-axiomatisierbar sind.

(a) Die Klasse aller partiellen Ordnungen $(A, <)$, in denen jede Menge von paarweise unvergleichbaren Elementen endlich ist.
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Klasse aller endlichen Mengen nicht FO-axiomatisierbar ist.

(b) Die Klasse aller unendlichen diskreten linearen Ordnungen $(A, <)$ mit größtem und kleinstem Element.

(c) Die Klasse aller linearen Ordnungen $(A, <)$, die weder dicht noch diskret sind.