Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 11.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Marion und Lothar haben einige Freunde zum Essen eingeladen und folgende Rückmeldungen erhalten:

(a) Wenn Antonia kommt, bringt sie Benjamin mit;

(b) Mindestens einer der Zwillinge Claudius und Desirée kommt;

(c) Entweder kommt Benjamin oder Emil, aber nicht beide;

(d) Entweder kommen Emil und Desirée oder beide nicht;

(e) Wenn Claudius kommt, dann kommen auch Desirée und Antonia.

Finden Sie durch geeignete Formalisierung in der Aussagenlogik heraus, wer zum Abendessen kommt und wer nicht.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ heißt *kontingent* wenn sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar ist. Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, kontingent oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(1) $\neg(X \to (Y \to X))$;

(2) $(X \wedge (Y \to \neg X)) \to Y$;

(3) $(\neg X \to (X \wedge Y)) \to (Y \to X)$.

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen (siehe Skript S. 6), dass folgende Formeln logisch äquivalent sind:

(1) $X \to (Y \wedge Z)$ und $(X \to Y) \wedge (X \to Z)$;

(2) $(X \wedge Y \wedge Z) \to Q$ und $X \to \big(Y \to (Z \to Q)\big)$;

(3) $(X \leftrightarrow \neg Y) \vee \neg X$ und $(X \wedge Y) \to \neg(Z \to X)$.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Konstruieren Sie eine Formel $\psi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für alle dazu passenden Interpretationen $\mathfrak{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \to \{0,1\}$ gilt, dass sich durch Ändern jedes Wahrheitswertes $\mathfrak{I}(X_i)$ für $X_i \in \{X_0, X_1, X_2\}$ auch der Wahrheitswert $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ ändert.

(b) Geben Sie für jedes n eine Formel $\varphi_n(X_0, \dots, X_{n-1})$ mit der Eigenschaft aus (a) an.

(c) Zu gegebenen Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3 : \{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\} \to \{0,1\}$ definieren wir die neue Interpretation $\Delta[\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3] : \{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\} \to \{0,1\}$ durch

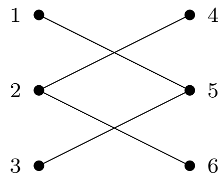
$$\Delta[\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3](X) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |\{i \in \{1,2,3\} : \mathfrak{I}_i(X) = 1\}| \text{ ist gerade} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass falls $\mathfrak{I}_1 \models \varphi_n$, $\mathfrak{I}_2 \models \varphi_n$ und $\mathfrak{I}_3 \models \varphi_n$ gilt, so auch $\Delta[\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3] \models \varphi_n$.

Aufgabe 4 10 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \dots, n$ identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar $i < k$ von Knoten wird eine Variable X_{ik} zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen i und k gibt.

(a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



(b) Konstruieren Sie zunächst für $n = 4$ und dann für beliebige n Formeln φ_n, die ausdrücken, dass der Graph zusammenhängend ist.

(c) Konstruieren Sie für beliebige n Formeln φ_n, die ausdrücken, dass der Graph einen Hamiltonkreis enthält.