Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 18.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{0, \rightarrow\}$ bzw. $\{1, \leftrightarrow\}$ funktional vollständig ist.

(b) Sei $f \in B^3$ die durch $f(x, y, z) := 1 - \min(x, y, z)$ definierte Boolesche Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

Aufgabe 2 10 Punkte

Für Tupel $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n), \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \{0, 1\}^n$ schreiben wir $\bar{x} \leq \bar{y}$ falls $x_i \leq y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Eine Boolesche Funktion $f \in B^n$ heißt *monoton*, falls für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \{0, 1\}^n$ mit $\bar{x} \leq \bar{y}$ gilt, dass $f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$.

(a) Zeigen Sie, dass man aus $F = \{\wedge, \vee, 0, 1\}$ genau die Klasse der monotonen Funktionen erzeugen kann. Folgern Sie, dass F funktional unvollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass *jede* Erweiterung von F um eine nicht-monotone Boolesche Funktion, eine funktional vollständige Menge liefert.

Hinweis: Drücken Sie mit Hilfe einer solchen Funktion die Negation aus.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob folgende Formeln erfüllbar sind. Geben Sie als Zwischenschritte die Mengen der markierten Variablen an.

$$\varphi := (A \wedge B \wedge C \rightarrow 0) \wedge (C \wedge D \rightarrow E) \wedge (A \wedge D \wedge E \rightarrow F) \wedge (1 \rightarrow D)$$
$$\wedge (D \rightarrow C) \wedge (C \wedge E \rightarrow A) \wedge (F \wedge D \wedge E \rightarrow B),$$

$$\psi := (A \wedge B \wedge C \rightarrow 0) \wedge (B \wedge D \rightarrow F) \wedge (A \wedge F \rightarrow D) \wedge (B \wedge C \wedge E \rightarrow F)$$
$$\wedge (1 \rightarrow K) \wedge (1 \rightarrow L) \wedge (D \wedge K \wedge L \rightarrow 0).$$

(b) Zu zwei aussagenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ über dem gleichen Definitionsbereich σ definieren wir eine neue Interpretation $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 : \sigma \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X)).$$

Zeigen Sie, dass für jede Horn-Formel φ der Schnitt zweier Modelle wieder ein Modell ist, d.h. wenn $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel. *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(i) $X \rightarrow (Y \vee Z)$;

(ii) $((X \vee Z) \rightarrow (\neg Y \wedge \neg Z)) \wedge (1 \rightarrow X)$;

(iii) $(\neg Z \rightarrow (X \vee Y)) \wedge (Z \rightarrow Y)$.