Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 02.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Verwenden Sie jeweils (in geeigneter Weise) die Resolutionsmethode, um die folgenden Aussagen zu beweisen oder zu widerlegen.

(a) Genau eine der beiden folgenden Formeln ist unerfüllbar:

$$\varphi := (\neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (V \vee X) \wedge (\neg Y \vee V) \wedge (\neg V \vee \neg X) \wedge (\neg V \vee Z)$$
$$\psi := (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y).$$

(b) Die folgende Formel ist eine Tautologie:

$$\vartheta := X \vee (\neg X \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

(c) Es gilt $\{(X \vee Y), (\neg Z \vee X), (\neg X \vee Z), (\neg Y \vee Z \vee X), (\neg Z \vee Y)\} \models X \wedge Y \wedge Z$.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Zwei Formeln φ und ψ *schließen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode prüfen, ob φ und ψ einander ausschließen?

(b) Zeigen Sie, dass sich die Erfüllbarkeit einer Klauselmenge $\mathcal{K}$ nicht ändert, wenn man aus $\mathcal{K}$ alle Klauseln ausschließt, die eine Variable enthalten, welche nur positiv oder nur negativ in $\mathcal{K}$ vorkommt.

(c) Verwenden Sie die Methoden aus (a) und (b), um zu zeigen, dass

$$\varphi :=(X \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Z \rightarrow V) \wedge (Y \vee V) \wedge (Z \rightarrow (\neg X \vee V)) \wedge (V \vee \neg Y \vee \neg Z) \text{ und}$$
$$\psi :=((Z \wedge \neg V) \rightarrow X) \wedge \neg(\neg V \vee \neg Z) \wedge (X \rightarrow (V \vee Z)) \wedge (V \vee \neg X \vee \neg Y)$$
$$\wedge ((\neg V \wedge \neg X) \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge \neg(\neg V \wedge X)$$

einander nicht ausschließen.

Aufgabe 3 10 Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *N-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln negativ ist. Dabei heißt eine Klausel *negativ*, falls sie kein positves Literal enthält.

(a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne negative Klauseln erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie per N-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{X, \neg Y\}, \{Z, Y\}, \{\neg Z, Y\}, \{\neg Y, \neg X\}\}$$

unerfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass der N-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel $\Box$ durch N-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d) Zeigen Sie, dass der N-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, so lässt sich $\Box$ aus K durch N-Resolution ableiten.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Vollständigkeit für das Resolutionskalkül aus der Vorlesung. Führen Sie den Beweis per Induktion über die Anzahl der in K vorkommenden Aussagenvariablen.