Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 09.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antworten *semantisch*, d.h. unter Verwendung von Interpretationen, nicht durch Beweise im Sequenzenkalkül.

(i) $(X \to (Y \lor \neg Z)), (\neg Z \lor X) \Rightarrow \neg Z, (X \land Y)$

(ii) $(X \land \neg Y), (Y \to Z) \Rightarrow (X \to Z)$

(iii) $(\neg X \lor Y), \neg(Y \to (Z \land X)) \Rightarrow Y, (X \land \neg Z)$

(b) Wie kann man mit Hilfe des Resolutionskalküls die Gültigkeit einer Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ zeigen? Verwenden Sie dieses Verfahren, um zu beweisen, dass die folgende Sequenz gültig ist:

$$(Y \to X), (Y \to (\neg Z \lor X)) \Rightarrow (X \land Z), (\neg Y \lor \neg Z).$$

Aufgabe 2 10 Punkte

Eine Schlussregel heißt *korrekt*, wenn für alle aussagenlogischen Formelmengen und Formeln $(\Gamma, \Delta, \varphi, \psi, \vartheta, \dots)$ gilt: Sind alle Prämissen gültig, so ist auch die Konklusion gültig. Analog heißt eine Schlussregel *invers korrekt*, wenn für alle aussagenlogischen Formelmengen und Formeln $(\Gamma, \Delta, \varphi, \psi, \vartheta, \dots)$ gilt: Ist die Konklusion gültig, so ist auch jede Prämisse gültig.

(a) Zeigen Sie, dass die Implikationsregel $(\to\Rightarrow)$ des aussagenlogischen Sequenzenkalküls korrekt und invers korrekt ist (vgl. Lemma (1.28) im Skript).

$$(\to\Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta}$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Schlussregeln korrekt und/oder invers korrekt sind.

(i) $\dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$

(ii) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\varphi \land \psi)}$

(iii) $\dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\varphi \land \psi)}$

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für die folgenden Sequenzen:

(i) $(X \wedge Y) \rightarrow (Y \wedge Z),\ Z \rightarrow (X \wedge Y) \Rightarrow X \wedge Z,\ \neg Y$;

(ii) $Y \rightarrow (\neg Z \vee X),\ (\neg X \rightarrow Y), (X \vee Z) \Rightarrow X$.

(b) Wir definieren einen neuen binären aussagenlogischen Junktor $\not\rightarrow$ mit der Semantik $\mathfrak{I} \models (\varphi \not\rightarrow \psi)$ gdw. $\mathfrak{I} \not\models (\varphi \rightarrow \psi)$. Geben Sie die Schlussregeln $(\not\rightarrow \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \not\rightarrow)$ an, die Ihnen erlauben, den Junktor $\not\rightarrow$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion einzuführen (analog zu den Schlussregeln $(\rightarrow \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \rightarrow)$ für $\rightarrow$) und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.

(c) Konstruieren Sie einen Beweis für die Sequenz

$$((X \not\rightarrow Y) \not\rightarrow Z)) \Rightarrow \neg(Y \not\rightarrow Z), \neg X$$

in dem um die Schlussregeln $(\not\rightarrow \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \not\rightarrow)$ erweiterten Sequenzenkalkül.