Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Mittwoch, den 23.05.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $M \subseteq A$ eine Teilmenge des Universums. Die von M *erzeugte* Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist die kleinste Substruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $M \subseteq B$.

(a) Betrachten Sie die Boolesche Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{BA}(\mathbb{N}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, \mathbb{N}).$$

Welche Substrukturen von $\mathrm{BA}(\mathbb{N})$ werden von den folgenden Teilmengen erzeugt?

(i) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(ii) Die Menge aller unendlichen Intervalle $(n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}$.

(iii) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement unendlich ist.

(b) Der (*geordnete*) *binäre Baum* ist die Struktur $\mathfrak{T} := (T, s_0, s_1)$ mit Universum $T := \{0,1\}^*$ und den Nachfolgerfunktionen $s_0(w) := w0$ und $s_1(w) := w1$

Der *ungeordnete binäre Baum* kann als Struktur $\mathfrak{T}_\preceq := (T, \preceq)$ mit demselben Universum T und der Präfixordnung

$$x \preceq y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein Wort } z \in \{0,1\}^* \text{ mit } y = xz$$

verstanden werden. Welche der folgenden Mengen sind Universen einer Substruktur von $\mathfrak{T}$ bzw. von $\mathfrak{T}_\preceq$?

(i) $A := \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

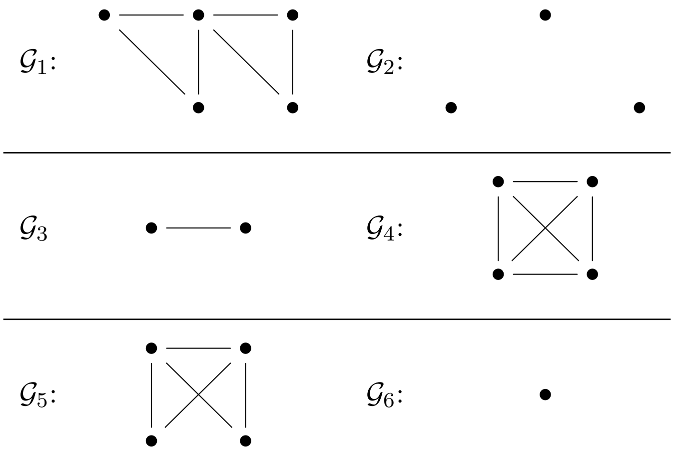
(ii) $B := \{0110w \mid w \in \{0,1\}^*\}$

(iii) $C := \{w \mid w \in \{0,1\}^*,\ |w| < 17\}$

(iv) $D := \{u111w \mid u, w \in \{0,1\}^*\}$

Aufgabe 2 10 Punkte

Wir betrachten die folgenden Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen die folgenden Sätze gelten (kurze Begründung!).

$\varphi_1 := \forall x(\exists y\,(x \neq y) \rightarrow \exists y\, Exy)$;

$\varphi_2 := \exists x \exists y \exists z(Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$;

$\varphi_3 := \exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge Exy \wedge Exz)$;

$\varphi_4 := \exists x \forall y(Exy \vee x = y)$;

$\varphi_5 := \exists x \forall y(\neg Exy)$.

$\varphi_6 := \forall x \forall y(x \neq y \wedge Exy)$.

$\varphi_7 := \exists x \forall y(x = y)$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{R}}, \exp^{\mathfrak{R}})$ der Signatur $\tau = \{+, \exp\}$, wobei $+^{\mathfrak{R}}$ der üblichen Addition und $\exp^{\mathfrak{R}}(x) = e^x$ der Exponentialfunktion entspricht.

(a) Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in $\mathrm{FO}(\tau)$ aus. Achten Sie dabei auf die freien Variablen Ihrer Formeln.

  (i) $x = 1$.

  (ii) Für x und y gilt, $y = |x|$.

  (iii) $x > y$.

  (iv) x ist positiv und $y = \ln(x)$.

  (v) $x \cdot y = z$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es für jedes Element $r \in \mathbb{R}$ eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\tau)$ gibt, die r definiert, d.h. für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathfrak{R} \models \varphi(s) \quad \text{gdw.} \quad s = r.$$

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei τ eine Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen.

(a) Für diesen Aufgabenteil nehmen wir an, dass $A \subseteq B$. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ genau dann gilt, wenn für alle *quantorenfreien* Formel $\eta(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \eta(a_1, \ldots, a_k) \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{B} \models \eta(a_1, \ldots, a_k).$$

Gilt diese Charakterisierung auch, falls beliebige $\mathrm{FO}(\tau)$-Formeln erlaubt werden?

(b) Wir nehmen ab sofort an, dass τ nur Relationssymbole enthält und konstruieren aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden folgenden neuen τ-Strukturen:

- $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ sei die τ-Struktur mit Universum $A \times B$ und für $R \in \tau$ den Relationen

$$R^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} := \{((a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)) \in (A \times B)^k : (a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}, (b_1, \ldots, b_k) \in R^{\mathfrak{B}}\}.$$

- $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ sei die τ-Struktur mit Universum $A \cup B$ und für $R \in \tau$ den Relationen

$$R^{\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}} := R^{\mathfrak{A}} \cup R^{\mathfrak{B}}.$$

Sei nun φ ein $\mathrm{FO}(\tau)$-Satz der Form $\varphi = \exists x_1 \cdots \exists x_k \, \eta(x_1, \ldots, x_k)$, wobei η quantorenfrei ist, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \varphi$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann auch gilt

(i) $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \models \varphi$, bzw.

(ii) $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \models \varphi$ für den Fall, dass $A \cap B = \emptyset$, bzw.

(iii) $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \models \varphi$ für den allgemeinen Fall.