Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Mittwoch, den 06.06.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 20 Punkte

Sei $\tau = \{f, R, S, T\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol, R ein zweistelliges Relationssymbol und S, T einstellige Relationssymbole sind. Geben Sie für die folgenden Klassen von τ-Strukturen (wenn möglich endliche) Axiomensysteme an.

(a) $\mathcal{K}_1 = \{(A, f, R, S, T) : f$ ist injektiv, nicht surjektiv und S und T parititionieren $A\}$

(b) $\mathcal{K}_2 = \{(A, f, R, S, T) : R$ ist der Graph einer bijektiven Funktion zwischen S und $T\}$

(c) $\mathcal{K}_3 = \{(A, f, R, S, T) :$ das Urbild von S unter f ist unendlich$\}$

(d) $\mathcal{K}_4 = \{(A, f, R, S, T) : R$ ist eine partielle Ordnung auf S und eine lineare Ordnung auf $T\}$

(e) $\mathcal{K}_5 = \{(A, f, R, S, T) :$ der gerichtete Graph (A, R) ist kreisfrei$\}$

(f) $\mathcal{K}_6 = \{(A, f, R, S, T) : f(s)$ ist von keinem $s \in S$ im gerichteten Graphen (A, R) erreichbar$\}$

(g) $\mathcal{K}_7 = \{(A, f, R, S, T) : R$ ist lineare Ordnung mit $(x, f^n(x)) \in R$ für alle $x \in A$, $n \in \mathbb{N}\}$

(h) $\mathcal{K}_8 = \{(A, f, R, S, T) : R$ ist Äquivalenzrelation, S, T sind zwei verschiedene R-Äquivalenzklassen$\}$

(i) $\mathcal{K}_9 = \{(A, f, R, S, T) :$ es gilt $T \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(T)\}$

(j) $\mathcal{K}_{10} = \{(A, f, R, S, T) :$ es gilt $R = f(S) \times T\}$

Aufgabe 2 10 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen für beliebige Signaturen τ, Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ und Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gelten.

(a) Falls $\Phi \not\models \varphi \rightarrow \psi$, so ist $\psi \notin \Phi$.

(b) Ist x eine Variable, die nicht frei in Φ vorkommt, so gilt $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \models \forall x \varphi$.

(c) φ ist erfüllbar genau dann, wenn $\forall x_1 \cdots \forall x_k\, \varphi$ erfüllbar ist.

(d) Ist $\varphi \not\equiv \psi$, so gilt $\Phi \not\models \varphi$ oder $\Phi \not\models \varphi \rightarrow \psi$.

(e) Es gibt unendlich viele verschiedene $\mathrm{FO}(\tau)$-Formeln ϑ mit $\vartheta \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$.

(f) Ist $\mathrm{frei}(\varphi) \neq \mathrm{frei}(\psi)$, so gilt insbesondere auch $\varphi \not\equiv \psi$.

(g) Gilt $\forall x \varphi \equiv \forall x \psi$, so gilt insbesondere auch $\exists x \varphi \equiv \exists x \psi$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Eine lineare Ordnung $(A, <)$ heißt *dicht*, wenn für alle Elemente $a, b \in A$ mit $a < b$ ein Element $c \in A$ existiert mit $a < c < b$. Dagegen heißt $(A, <)$ *diskret*, wenn

- zu jedem $a \in A$ entweder kein $b < a$ existiert oder es ein $b < a$ gibt, so dass kein c mit $b < c < a$ existiert, sowie
- zu jedem $a \in A$ entweder kein $b > a$ existiert oder es ein $b > a$ gibt, so dass kein c mit $a < c < b$ existiert.

Sei nun $(A, <)$ eine lineare Ordnung. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf A durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad \text{die Menge } \{c \in A \ : \ a < c < b \text{ oder } b < c < a\} \text{ ist endlich.}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf A ist.

(b) Die Menge $A_\sim$ der $\sim$-Äquivalenzklassen ist die Menge $A_\sim = \{[a]_\sim : a \in A\}$. Hierbei bezeichne $[a]_\sim \subseteq A$ die Äquivalenzklasse eines Elements $a \in A$ unter $\sim$.

Zeigen Sie, dass durch $[a]_\sim < [b]_\sim :\Leftrightarrow (a < b \text{ und } a \not\sim b)$ eine lineare Ordnung auf $A_\sim$ festgelegt wird.

Die resultierende Ordnung bezeichnen wir im Folgenden mit $(A, <)/_\sim$.

(c) Zu einer linearen Ordnung $(A, <)$ betrachten wir die um $\sim$ expandierte Struktur $(A, <, \sim)$. Geben Sie jeweils einen FO$(\{<, \sim\})$-Satz an der, ausgewertet in $(A, <, \sim)$, besagt, dass

- die Ordnung $(A, <)/_\sim$ dicht ist, bzw.
- die Ordnung $(A, <)/_\sim$ diskret ist.

(d) Geben Sie eine diskrete lineare Ordnung $(A, <)$ an, so dass $(A, <)/_\sim$ dicht ist.

(e) Gibt es auch dichte lineare Ordnungen $(B, <)$, so dass $(B, <)/_\sim$ diskret ist?