Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Mittwoch, den 13.06.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Seien E und R zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Formen Sie die folgenden Formeln in Negations-, Pränex- und Skolemnormalform um.

(a) $\varphi := \exists x[\forall y \exists z(\neg Exz \land \neg Eyx) \to \forall y(Efxyz \land \forall z Rxz)]$.

(b) $\psi := [\exists z \forall x(\exists y(Exy \land Eyz) \land \forall y \forall z(Eyz \lor Exz \to y = z))] \to \forall z(Exfyz \to \exists x Rxfxy)$.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass jeder erfüllbare FO-Satz ein abzählbares Modell besitzt. Sei τ eine beliebige Signatur, $\tau_0 \subseteq \tau$ eine endliche Teilmenge und $\mathfrak{B}$ eine τ_0-Struktur.

(a) Zeigen Sie, dass für jede nicht-leere endliche Teilmenge $M \subseteq B$ eine abzählbare minimale Substruktur $\mathfrak{A}_M \subseteq \mathfrak{B}$ existiert, deren Universum M enthält (die von M *erzeugte* Substruktur, vgl. Übung 6, Aufgabe 1).

(b) Sei $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_k\, \eta \in \mathrm{FO}(\tau_0)$ ein Satz, wobei η quantorenfrei ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{A}_M \models \varphi$ für alle nicht-leeren endlichen Teilmengen $M \subseteq B$ gilt.

(c) Verwenden Sie (a) und (b) sowie den Satz über die Skolem-Normalform aus der Vorlesung, um zu zeigen: Ist $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein erfüllbarer Satz, so besitzt ψ ein abzählbares Modell.

(d) Hat auch jede erfüllbare Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ stets ein abzählbares Modell?

Aufgabe 3* — 5* Punkte

Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}^{2\times 2}, +, \cdot, P)$ die Menge der 2×2-Matrizen über $\mathbb{Q}$ zusammen mit der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation sowie

$$P := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = c = d = 0\}.$$

Geben Sie $\mathrm{FO}(\{+, \cdot, P\})$-Formeln an, die ausgewertet in $\mathfrak{A}$ die folgenden Sachverhalte ausdrücken.

(a) x ist die Einheitsmatrix und $\det(y) = 0$;

(b) Mindestens eine der Spalten von x ist gleich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(c) x ist eine Diagonalmatrix, d.h. $x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4* 5* Punkte

Sei $\tau = \{\circ\}$, wobei $\circ$ eine zweistellige Funktion ist. Geben Sie (möglichst endliche) Axiomensysteme für die folgenden Klassen von τ-Strukturen an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist eine unendliche, kommutative Gruppe$\}$;

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist eine torsionsfreie Gruppe, d.h. $x^n \neq \mathrm{id}$ für alle $n \geq 1, x \neq \mathrm{id}\}$;

(c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist unendliche Gruppe, die nur Elemente der Ordnung ≤ 17 enthält$\}$;

(d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist Gruppe, in der jede Untergruppe, die von zwei beliebigen Elementen erzeugt wird, kommutativ ist$\}$;

(e) $\mathcal{K}_5 := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist Gruppe, die für jede Primzahl p ein Element der Ordnung p enthält$\}$.