Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

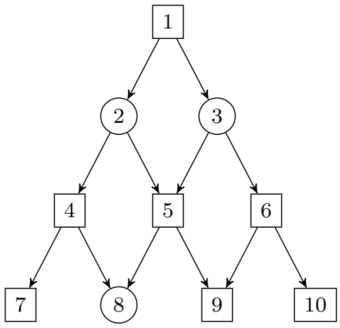
9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Mittwoch, den 20.06.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

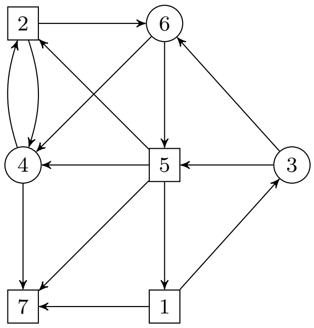
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

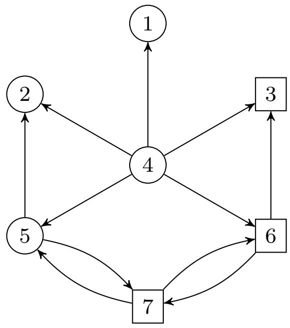
Wir betrachten folgende Spielgraphen (eingekreiste Knoten gehören Spieler 0, und demnach rechteckige Knoten Spieler 1).



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{G}_3$

(a) Berechnen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 von Spieler 0 und Spieler 1 in den angegebenen Spielen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$.

(b) Sind die Spiele $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ fundiert? Sind sie determiniert?

(Erinnerung: Ein Spiel heißt *fundiert*, wenn jede mögliche Partie endlich ist.)

(c) Beweisen Sie, dass jedes fundierte Spiel determiniert ist.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Wir betrachten den Körper mit zwei Elementen $\mathfrak{F}_2 := (\{0,1\}, +, \cdot)$ und die Formel

$$\varphi := \forall x\big(x + x = x \rightarrow \exists y(x + y = y \land x \cdot y = x)\big).$$

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.

(b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler in $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir wollen ein Auswertungsspiel $\mathrm{MC}^*(\mathfrak{A}, \psi)$ für FO-Sätze formulieren, die nicht notwendigerweise in Negationsnormalform vorliegen. Sei ψ ein $\mathrm{FO}(\tau)$-Satz und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur.

Die Positionen des Spiels $\mathrm{MC}^*(\mathfrak{A}, \psi)$ sind Tupel (φ, β, n), wobei φ eine Teilformel von ψ, $\beta : \mathrm{frei}(\varphi) \to A$ eine Belegung der freien Variablen in φ und $n \in \{0, 1\}$ ist. Die Startposition im Spiel $\mathrm{MC}^*(\mathfrak{A}, \psi)$ ist stets $(\psi, \emptyset, 0)$. Hierbei bezeichne $\emptyset$ die leere Variablenbelegung. Wir notieren eine Position (φ, β, n) als $(\varphi(\bar{a}), n)$, wenn $\varphi = \varphi(\bar{x})$ und $\beta : \bar{x} \mapsto \bar{a}$.

An einer Position $(\varphi(\bar{a}), n)$ wird nun wie folgt gespielt:

- Sei $\varphi(\bar{a})$ eine atomare Formel. Ist $n = 0$, so gewinnt die Verifizierin falls $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ und der Falsifizierer gewinnt falls $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a})$. Ist $n = 1$, so gewinnt die Verifizierin, wenn $\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a})$ und der Falsifizierer gewinnt wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$.

- ...

(a) Ergänzen Sie die Regeln des Spiels $\mathrm{MC}^*(\mathfrak{A}, \psi)$ geeignet, so dass analog zum Model-Checking Spiel aus der Vorlesung gilt: Die Verifizierin gewinnt $\mathrm{MC}^*(\mathfrak{A}, \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$.

Berücksichtigen Sie bei Ihrer Modellierung, dass die Rollen der beiden Spieler vertauscht sind, genau dann wenn in einer Position $(\varphi(\bar{a}), n)$ das Bit $n = 1$ gesetzt ist.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit des Spiels, indem Sie per Induktion über den Aufbau von $\varphi(\bar{x})$ Folgendes zeigen (für den Induktionsschritt soll es uns hier genügen, exemplarisch die Fälle $\neg\vartheta$, $\eta \wedge \vartheta$, $\exists x \vartheta$ zu behandeln).

Die Verifizierin gewinnt das Spiel $\mathrm{MC}^*(\mathfrak{A}, \psi)$ von der Position $(\varphi(\bar{a}), n)$ aus genau dann, wenn ($\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ und $n = 0$) oder ($\mathfrak{A} \not\models \varphi(\bar{a})$ und $n = 1$).