Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Mittwoch, den 27.06.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass Sie in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind:

(a) die Menge der Primpotenzen und die Addition in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) die Menge $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Q}, +)$;

(c) die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$;

(d) eine beliebige nicht-triviale Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Q}$ (d.h. $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{Q}$) in $(\mathbb{Q}, \leq)$.

(e) die Menge $\{0, 1\}$ in $(\{0, 1\}^*, \preceq)$. Dabei bezeichne $\{0, 1\}^*$ die Menge der endlichen Wörter über $\{0, 1\}$ und $\preceq$ bezeichne die Präfix-Relation, d.h. $x \preceq y$ gdw. $xz = y$ für ein $z \in \{0, 1\}^*$.

(f) Die übliche lineare Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ in der Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur (wobei τ eine endliche Signatur ist).

(a) Konstruieren Sie einen FO(τ)-Satz ψ, so dass für alle τ-Strukturen $\mathfrak{B}$ Folgendes gilt:

$$\mathfrak{B} \models \psi \text{ gdw. } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

(b) Seien nun $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ endliche τ-Strukturen. Zeigen Sie, dass die Klasse

$$\mathcal{K} = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}_i, 0 \leq i \leq n\}$$

endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 10 + 5⋆ Punkte

Eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *starr*, wenn sie nur den trivialen Automorphismus besitzt, d.h. wenn für alle Automorphismem $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ gilt, dass $\pi(a) = a$ für alle $a \in A$.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Strukturen starr sind.

- $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$;
- $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +)$;
- $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +1)$ (hierbei bezeichne $+1$ die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$);
- $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <, P, Q)$, wobei $P = 2\mathbb{Z}$ und $Q = 3\mathbb{Z}$;
- $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}, +, E)$ wobei $E := \{(z, \frac{1}{z}) : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$;
- $\mathfrak{C} = (\mathbb{N}, R)$, wobei $R = \{(i, j, k) : \text{es gilt } k \neq 0,\ i \mid k \text{ und } i + j = k\}$.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur in der jedes Element elementar definierbar ist, d.h. für alle $a \in A$ ist die Menge $\{a\}$ in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ starr ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen Struktur mit der Eigenschaft aus (b) an.

(d)⋆ Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche starre τ-Struktur (τ sei ebenfalls endlich). Beweisen Sie, dass jede Relation $R \subseteq A^k$, $k \geq 1$ elementar definierbar ist in $\mathfrak{A}$.

Hinweis: Zeigen Sie erst, dass eine solche Struktur die Eigenschaft aus (b) haben muss.