Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

11. Übung Mathematische Logik

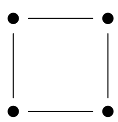
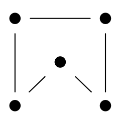
Abgabe: bis **Mittwoch, den 04.07.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte. Beachten Sie: Diese Zusatzaufgaben können aus Zeitgründen eventuell nicht in den Tutorien besprochen werden!

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Betrachten Sie folgende relationen Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(a) $\mathfrak{A} :=$  und $\mathfrak{B} :=$ 

(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M, 1)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M, 1)$, wobei M der Graph der Multiplikation ist, also $M = \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 : a \cdot b = c\}$;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, \{2^n : n \in \mathbb{N}\}, \{3^n : n \in \mathbb{N}\})$;

(d) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, \equiv_2)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, \equiv_s)$, wobei $\equiv_2 := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a - b) \text{ ist gerade}\}$ sowie $\equiv_s := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a, b \geq 0 \text{ oder } a, b < 0\}$.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Theorien sind vollständig. (Erinnerung: Eine Theorie T heißt *vollständig*, wenn für alle Sätze $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt $\psi \in T$, oder $\neg\psi \in T$.)
   (i) Die Theorie von $(\mathbb{N}, +)$;
   (ii) die Theorie der Klasse aller τ-Strukturen $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ für eine feste τ-Struktur $\mathfrak{A}$;
   (iii) die Theorie der linearen Ordnungen mit genau 17 Elementen;
   (iv) die Theorie der abzählbar unendlichen Cliquen (eine *Clique* ist ein vollständiger Graph).

(b) Beweisen Sie, dass die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen über einer relationalen Signatur τ, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4* 10* Punkte

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der Satz (3.21) von Ehrenfreucht-Fraïsse nur für endliche Signaturen gilt. Genauer wollen wir zeigen: Es gibt eine abzählbare relationale Signatur τ und zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so dass der Herausforderer das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, obwohl $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.

Sei dazu $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der co-endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, also $B = \{\mathbb{N} \setminus M : M \in A\}$ (vgl. Übung 6, Aufgabe 1).

Wir setzen $\tau := \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ für unäre Prädikate P_i und wir definieren

- $\mathfrak{A} := (A, P_0, P_1, P_2, \dots)$, wobei für $i \in \mathbb{N}$ gelte, dass $M \in P_i$ gdw. $i \in M$, und
- $\mathfrak{B} := (B, P_0, P_1, P_2, \dots)$, wobei analog für $i \in \mathbb{N}$ gelte, dass $M \in P_i$ gdw. $i \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass der Herausforderer das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle endlichen Signaturen $\sigma \subseteq \tau$ gilt: $\mathfrak{A} \restriction \sigma \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass zwischen zwei abzählbaren unendlichen Mengen stets eine bijektive Abbildung existiert.

(c) Verwenden Sie (b), um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.

Aufgabe 5* 10* Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass Sie in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind:

(a) die Menge der ungeraden Primzahlen in $(\mathbb{N}, |)$;

(b) die Matrizenmultiplikation in $(\mathbb{Q}^{2\times 2}, +)$, wobei $+$ die übliche Matrizenaddition bezeichne;

(c) die Addition in $(\mathbb{Q}, \cdot)$;

(d) die Menge $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{N})$;

(e) die Relation $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x^3 + y^3 = z^3\}$ in $(\mathbb{Z}, +)$.