Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, Dr. C. Löding, W. Pakusa

SS 2012

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis **Mittwoch, den 11.07.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1* 10* Punkte

(a) Beweisen Sie (semantisch, d.h. nicht per Ableitung im Sequenzenkalkül) oder widerlegen Sie, dass die folgenden Schlussregeln (für die Prädikatenlogik) korrekt sind.

(i) $\dfrac{\Gamma,\ \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \psi(c) \Rightarrow \Delta,\ \varphi(c)}$

(ii) $\dfrac{\Gamma,\ \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$

(iii) $\dfrac{\Gamma,\ \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$, wobei c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt.

(b) Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier b rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Ableitung einer geeigneten Sequenz $\Gamma \Rightarrow \emptyset$, wobei Γ die obige Aussage formalisiert.

Aufgabe 2* 10* Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit Hilfe von Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen.

(a) Die Klasse der unendlichen linearen Ordnungen.

(b) Die Klasse der ungerichteten Graphen ohne Kreise.

(c) Die Klasse der regulären Graphen (ein Graph ist *regulär*, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass jeder Knoten genau k Nachbarn besitzt).

(d) $\mathcal{K}_d := \{(A, R) : R \text{ ist Äquivalenzrelation mit genau 17 Äquivalenzklassen}\}$.

(e) $\mathcal{K}_e := \{(A, R) \in \mathcal{K}_d : \text{alle } R\text{-Äquivalenzklassen sind unendlich}\}$.

Aufgabe 3* 10* Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit Hilfe des Kompaktheitssatzes.

(a) Die Klasse der endlichen Gruppen.

(b) Die Klasse der unendlichen Gruppen.

(c) Die Klasse der Körper von Charakteristik > 0, d.h. Körper in denen gilt $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p\text{-mal}} = 0$ für eine Primzahl p.

(d) Die Klasse aller *archimedischer* Körper; dabei heißt ein linear geordneter Körper $\mathfrak{K} = (K, +, \cdot, 0, 1, <)$ archimedisch, wenn für alle $a \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ existiert.

(e) Die Klasse der *zyklischen* Gruppen, d.h. Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$, in denen ein Element $g \in G$ existiert mit $G = \{g^z : z \in \mathbb{Z}\}$; hierbei ist g^z induktiv definiert durch $g^0 := e$ (das neutrale Element der Gruppe G), und $g^{n+1} := g^n \circ g$ und $g^{-n} := (g^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4* 10* Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit Hilfe einer Methode Ihrer Wahl.

(a) Die Klasse der zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ isomorphen Strukturen.

(b) Die Klasse der zu $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ isomorphen Strukturen.

(c) Die Klasse aller endlichen Körper.

(d) Die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

(e) Die Klasse aller unendlichen dichten linearen Ordnungen.