Mathematische Logik
SS 2011

Prof. Dr. Erich Grädel

Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

4 Vollständigkeitsatz, Kompaktheitssatz und Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

4.1 Der Sequenzenkalkül

Wir erweitern den in Abschnitt 1.6 beschriebenen aussagenlogischen Sequenzenkalkül auf die Prädikatenlogik.

Durch Einführen neuer Konstantensymbole können wir uns auf die Betrachtung von Sätzen beschränken und so die etwas lästigen Komplikationen vermeiden, die sich aus Konflikten zwischen freien und gebundenen Variablen ergeben können. Sei σ eine beliebige Signatur und seien $c_1, c_2, \dots$ abzählbar viele, paarweise verschiedene und nicht in σ enthaltene Konstantensymbole. Wenn wir jede Formel $\psi(x_1, \dots, x_n)$ mit den freien Variablen $x_1, \dots, x_n$ durch den Satz $\psi(c_1, \dots, c_n)$ ersetzen, dann können wir alle Fragen über Gültigkeit, Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung auf Sätze reduzieren.

Im Folgenden bezeichnet σ eine beliebige abzählbare Signatur. und $\tau = \sigma \cup C$ für eine abzählbar unendliche Menge C von Konstanten, welche nicht in σ enthalten sind. Wenn von $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ oder $\Gamma \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ die Rede ist, sind immer Sätze bzw. Satzmengen gemeint, es sei denn, wir deuten durch die Notation $\psi(x)$ explizit an, dass x in ψ frei vorkommt.

Definition 4.1. Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei Γ, Δ endliche Mengen von Sätzen in $\mathrm{FO}(\tau)$ sind. Eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist *gültig*, wenn jedes Modell von Γ auch ein Modell mindestens einer Formel aus Δ ist. Die *Axiome* des Sequenzenkalküls sind alle Sequenzen der Form $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \psi$. Die *Schlussregeln* sind dieselben wie beim aussagenlogischen Sequenzenkalkül, erweitert um die Gleichheitsregel, die

Substitutionsregeln und die Einführungsregeln für die Quantoren $\exists$ und $\forall$.

Die Gleichheitsregel lautet:

$$(=) \quad \frac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Die Substitutionsregeln erlauben das Austauschen von Termen. Die Schreibweise $t \doteq t'$ deutet an, dass entweder $t = t'$ oder $t' = t$ benutzt werden kann:

$$(S \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

Hier stehen t, t' für beliebige Grundterme aus $\mathrm{T}(\tau)$; $\psi(x)$ ist eine beliebige Formel aus $\mathrm{FO}(\tau)$, in der keine andere Variable als x frei vorkommt, und $\psi(t)$ ist die Formel, die man daraus durch Substitution von t für x erhält.

Die Korrektheit der Gleichheitsregel ist trivial. Es ist auch leicht einzusehen, dass die Substitutionsregeln korrekt sind. Wir erläutern dies für $(\Rightarrow S)$: Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)$ eine gültige Sequenz und $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\Gamma, t \doteq t'$. Zu zeigen ist, dass $\mathfrak{A}$ dann entweder Modell einer Formel aus Δ oder Modell von $\psi(t')$ ist. Nehmen wir also an, dass in $\mathfrak{A}$ alle Formeln aus Δ falsch sind. Aber dann folgt $\mathfrak{A} \models \psi(t)$, denn $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)$ ist gültig und $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Da aber auch $\mathfrak{A} \models t = t'$, folgt $\mathfrak{A} \models \psi(t')$.

Die Einführungsregeln für $\exists$ und $\forall$ haben folgende Form:

$$(\exists \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}, \text{ wenn } c \text{ in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi \text{ nicht vorkommt.}$$

$$(\Rightarrow \exists) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow \forall) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}, \text{ wenn } c \text{ in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi \text{ nicht vorkommt.}$$

Beispiel 4.2.

- Hier ist ein Beweis für die gültige Sequenz $\exists x \forall y Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy$, welcher die Anwendung der Quantorenregeln illustriert:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Rcd \Rightarrow Rcd}{Rcd \Rightarrow \exists x Rxd}}{\forall y Rcy \Rightarrow \exists x Rxd}}{\forall y Rcy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy}}{\exists x \forall y Rxy \Rightarrow \forall y \exists x Rxy}$$

- Um die Sequenz $Rfc, \forall x(fx = x) \Rightarrow Rffc$ abzuleiten, beginnt man mit dem Axiom $Rfc \Rightarrow Rfc$. Wenn wir $\psi(x) := Rfx$ wählen, dann ist dies die Sequenz $Rfc \Rightarrow \psi(c)$. Mit der Regel $(\Rightarrow S)$ können wir daraus die Sequenz $Rfc, fc = c \Rightarrow \psi(fc)$, also $Rfc, fc = c \Rightarrow Rffc$ ableiten. Durch Anwendung der Regel $(\forall \Rightarrow)$ erhalten wir daraus eine Ableitung von $Rfc, \forall x(fx = x) \Rightarrow Rffc$.

Übung 4.1. Beweisen Sie die Korrektheit der Quantorenregeln. Zeigen Sie auch, dass in den Regeln $(\exists \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \forall)$ die Bedingung, dass c nicht in Γ, ψ und Δ vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

Tabelle 5.1 fasst alle Regeln des Sequenzenkalküls nochmals zusammen. Die weiteren wesentlichen Begriffe können unmittelbar vom aussagenlogischen Sequenzenkalkül übernommen werden. Die Menge der *ableitbaren Sequenzen* ist die kleinste Menge, welche alle Axiome umfasst und mit jeder Instanz der oberen Zeile einer Schlussregel auch die entsprechende Instanz der unteren Zeile enthält. Ein *Beweis* ist ein beschrifteter Baum, so dass alle Blätter mit Axiomen, alle inneren Knoten mit der Konklusion einer Schlussregel und deren Kinder mit den Prämissen derselben Regel beschriftet sind.

Da die Axiome des Sequenzenkalküls gültig sind, und die Schlussregeln gültige Sequenzen immer in gültige Sequenzen überführen, folgt, dass im Sequenzenkalkül nur gültige Sequenzen ableitbar sind.

Satz 4.3 (Korrektheitssatz für den Sequenzenkalkül)**.** Jede im Sequenzenkalkül ableitbare Sequenz ist gültig.

$$
\begin{array}{llll}
(=) & \dfrac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} & & \\[2ex]
(S \Rightarrow) & \dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow S) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \\[2ex]
(\neg \Rightarrow) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \neg) & \dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi} \\[2ex]
(\vee \Rightarrow) & \dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \vee) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta} \\[2ex]
(\wedge \Rightarrow) & \dfrac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \wedge) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta} \\[2ex]
(\rightarrow\Rightarrow) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow\rightarrow) & \dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta} \\[2ex]
(\exists \Rightarrow) & \dfrac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ ^{*} & (\Rightarrow \exists) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)} \\[2ex]
(\forall \Rightarrow) & \dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} & (\Rightarrow \forall) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ ^{*}
\end{array}
$$

*wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

Tabelle 4.1. Die Regeln des Sequenzenkalküls

4.2 Der Vollständigkeitssatz

Ableitbarkeit in Theorien. Aus dem Sequenzenkalkül erhält man auch einen Ableitungsbegriff für einen einzelnen Satz oder eine Sequenz aus einer Menge von Hypothesen, z.B. aus den Axiomen einer mathematischen Theorie.

Definition 4.4. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ eine Menge von Sätzen. Ein Satz ψ ist *ableitbar* aus dem Axiomensystem Φ (kurz: $\Phi \vdash \psi$), wenn eine endliche Teilmenge Γ von Φ existiert, so dass die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \psi$ im Sequenzenkalkül ableitbar ist. Eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist ableitbar aus Φ, wenn es eine ableitbare Sequenz $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ gibt mit $\Gamma' \subseteq \Phi$.

Die Ableitbarkeit von Sequenzen und die Ableitbarkeit von einzelnen Sätzen sind im Wesentlichen austauschbare Begriffe, denn die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist ableitbar aus Φ genau dann, wenn $\Phi \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.

Es gibt auch Satzmengen Φ aus denen *jeder* Satz (der entsprechenden Signatur) ableitbar ist. Eine solche Menge nennen wir *inkonsistent*.

Aufgrund der Korrektheit des Sequenzenkalküls sind inkonsistente Mengen unerfüllbar.

Beispiel 4.5. Jede Menge, welche einen Satz und gleichzeitig auch dessen Negation enthält, ist inkonsistent. In der Tat können wir jede Sequenz der Form $\psi, \neg\psi \Rightarrow \varphi$ mit der Regel $(\neg \Rightarrow)$ aus dem Axiom $\psi \Rightarrow \psi, \varphi$ ableiten.

Wenn nicht jeder Satz aus Φ ableitbar ist, dann nennen wir Φ *konsistent*. Offensichtlich ist Φ genau dann konsistent, wenn jede endliche Teilmenge von Φ konsistent ist.

Man beachte, dass Konsistenz und Ableitbarkeit $(\vdash)$ *syntaktische* Begriffe sind, da sie sich auf Formelmengen und Sätze als sprachliche Objekte und nicht auf ihre Bedeutung beziehen. Die zugehörigen semantischen Begriffe sind die Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung $(\models)$.

Der Korrektheitssatz für den Sequenzenkalkül impliziert: Wenn $\Phi \vdash \psi$, dann auch $\Phi \models \psi$. Der Vollständigkeitssatz besagt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 4.6 (Vollständigkeitssatz für den Sequenzenkalkül)**.** Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ und jeden Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ gilt:

(i) $\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \vdash \psi$;
(ii) Φ ist genau dann konsistent, wenn Φ erfüllbar ist.

4.3 Der Beweis des Vollständigkeitssatzes

Man beweist den Vollständigkeitssatz, indem man für jede beliebige, nicht aus Φ ableitbare Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ein Modell $\mathfrak{A}$ von $\Phi \cup \Gamma \cup \neg\Delta$ konstruiert. Dabei ist $\neg\Delta := \{\neg\psi : \psi \in \Delta\}$. Daraus erhält man sofort die beiden Aussagen des Vollständigkeitssatzes:

(i) Wir wissen bereits, dass $\Phi \models \psi$ aus $\Phi \vdash \psi$ folgt. Wenn $\Phi \nvdash \psi$, dann ist insbesondere die Sequenz $\emptyset \Rightarrow \psi$ nicht aus Φ ableitbar. Die Existenz eines Modells $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\neg\psi\}$ bedeutet aber, dass $\Phi \not\models \psi$.
(ii) Wir wissen bereits, dass jede erfüllbare Menge konsistent ist. Sei umgekehrt Φ konsistent. Dann gibt es ein ψ, so dass $\Phi \nvdash \psi$ und

daher (nach (i)) auch $\Phi \not\models \psi$. Also ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ und daher insbesondere Φ erfüllbar.

Es bleibt also die Aufgabe, für jede nicht aus Φ ableitbare Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ein Modell von $\Phi \cup \Gamma \cup \neg\Delta$ zu konstruieren.

Herbrandstrukturen und kanonische Modelle

Als Vorbereitung für die Modellkonstruktion behandeln wir Mengen von atomaren Sätzen. Wir definieren den Begriff einer Herbrandstruktur und konstruieren daraus, durch Übergang zu einer geeigneten Quotientenstruktur, für jede unter Substitution abgeschlossenen Menge von atomaren Aussagen das sogenannte *kanonische Modell*.

Definition 4.7. Eine *Herbrandstruktur* zu einer Signatur τ (die mindestens ein Konstantensymbol enthält) ist eine τ-Struktur $\mathfrak{H}$, deren Universum die Menge aller Grundterme der Signatur τ ist und deren Funktionssymbole durch ihre natürliche Operation auf den Termen interpretiert werden: Für n-stelliges $f \in \tau$ ist $f^{\mathfrak{H}}(t_1, \dots, t_n) := ft_1 \cdots t_n$. Die Interpretation der Relationssymbole aus τ ist beliebig.

Eine Herbrandstruktur $\mathfrak{H}$ ist eine Struktur, deren algebraisches Redukt gerade die Termalgebra über der leeren Variablenmenge ist. Man beachte, dass in $\mathfrak{H}$ jeder Grundterm durch sich selbst interpretiert ist: $t^{\mathfrak{H}} = t$.

Sei Σ eine Menge von atomaren τ-Sätzen. Mit $\mathfrak{H}(\Sigma)$ bezeichnen wir die Herbrandstruktur mit folgender Interpretation der Relationssymbole: Für n-stelliges $R \in \tau$ ist

$$R^{\mathfrak{H}(\Sigma)} = \{(t_1, \dots, t_n) : Rt_1 \cdots t_n \in \Sigma\}.$$

Im Allgemeinen ist $\mathfrak{H}(\Sigma)$ *kein* Modell von Σ: Seien t und t' zwei (syntaktisch) verschiedene Terme, so dass aber Σ die Formel $t = t'$ enthält. Dann ist $\mathfrak{H}(\Sigma)$ Modell von $t \neq t'$ und daher kein Modell von Σ. Es ist daher notwendig, Gleichheiten *herauszufaktorisieren*.

Definition 4.8. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Eine *Kongruenzrelation auf* $\mathfrak{A}$ ist eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A, welche in folgendem Sinn mit den Relationen und Funktionen von $\mathfrak{A}$ kompatibel ist:

(1) Ist $f \in \tau$ ein n-stelliges Funktionssymbol und $a_1, \dots, a_n, b_1 \dots, b_n \in A$ mit $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, so gilt:

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \sim f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n) .$$

(2) Ist $R \in \tau$ ein n-stelliges Relationssymbol und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ mit $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, so gilt:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (b_1, \dots, b_n) \in R^{\mathfrak{A}} .$$

Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $[a] := \{b \in A : a \sim b\}$ die *Kongruenzklasse von a unter* $\sim$.

Definition 4.9. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$. Die *Faktorstruktur* $\mathfrak{A}/\sim$ ist die τ-Struktur mit Universum $\{[a] : a \in A\}$ (der Menge der Kongruenzklassen von $\sim$) und der folgenden Interpretation der Relations- und Funktionssymbole.

(1) Ist $f \in \tau$ ein n-stelliges Funktionssymbol und $a_1, \dots, a_n \in A$, so gilt:

$$f^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)] .$$

(2) Ist $R \in \tau$ ein n-stelliges Relationssymbol und $a_1, \dots, a_n \in A$, so gilt:

$$([a_1], \dots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{A}/\sim} \text{ gdw. } (a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} .$$

Man beachte, dass $f^{\mathfrak{A}/\sim}$ und $R^{\mathfrak{A}/\sim}$ wohldefiniert sind, da $\sim$ eine Kongruenzrelation ist.

Beispiel 4.10. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\sim$ die Relation mit $a \sim b$ genau dann, wenn n ein Teiler von $a - b$ ist. Dann ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$. Die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/\sim$ ist isomorph zu $(\{0, \dots, n-1\}, +_n)$, wobei $+_n$ die Addition modulo n bezeichnet.

Definition 4.11. Eine Menge Σ von atomaren Sätzen in $\mathrm{FO}(\tau)$ ist *abgeschlossen unter Substitution*, wenn für jede atomare Formel $\psi(x)$ und alle Grundterme $t, t' \in \mathrm{T}(\tau)$ gilt:

(i) Σ enthält die Gleichung $t = t$.
(ii) Wenn $t = t'$ und $\psi(t)$ zu Σ gehören, dann auch $\psi(t')$.

Beispiel 4.12. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und Σ die Menge aller atomaren Sätze φ, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$. Dann ist Σ abgeschlossen unter Substitution.

Für beliebige Grundterme $t, t' \in \mathrm{T}(\tau)$ setzen wir nun:

$$t \sim t' \text{ gdw. } \Sigma \text{ enthält die Formel } t = t'.$$

Lemma 4.13. Sei Σ abgeschlossen unter Substitution. Dann ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Nach Bedingung (i) von Definition 5.11 ist $\sim$ reflexiv. Sei nun $t \sim t'$ und damit $t = t' \in \Sigma$. Wenn $\psi(x)$ die Formel $x = t$ ist, dann ist $\psi(t)$ die Gleichung $t = t$ und somit in Σ. Nach Bedingung (ii) von Definition 5.11 enthält Σ dann auch $\psi(t')$; dies ist aber gerade die Gleichung $t' = t$. Also folgt $t' \sim t$. Schließlich nehmen wir an, dass $t \sim t'$ und $t' \sim t''$. Sei $\psi(x)$ die Formel $t = x$. Also enthält Σ $\psi(t')$ und daher auch $\psi(t'')$; dies ist aber die Gleichung $t = t''$. Also $t \sim t''$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sim$ mit den Funktionen und Relationen von $\mathfrak{H}(\Sigma)$ kompatibel ist. Sei f ein n-stelliges Funktionssymbol und seien $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$. Wir müssen zeigen, dass $fs_1 \cdots s_n \sim ft_1 \cdots t_n$. Zu diesem Zweck sei $\psi_i(x)$ die Gleichung $fs_1 \cdots s_n = ft_1 \cdots t_{i-1}xs_{i+1} \cdots s_n$ für $i = 1, \dots, n$. Per Induktion zeigen wir, dass $\psi_i(t_i) \in \Sigma$.

Die Formel $\psi_1(s_1)$ ist einfach $fs_1 \cdots s_n = fs_1 \cdots s_n$ und daher in Σ. Also ist auch $\psi_1(t_1) \in \Sigma$. Beachte nun, dass $\psi_{i+1}(s_{i+1})$ und $\psi_i(t_i)$ dieselbe Formel bezeichnen, nämlich $fs_1 \cdots s_n = ft_1 \cdots t_i s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gehört also $\psi_{i+1}(s_{i+1})$ zu Σ, und daher auch $\psi_{i+1}(t_{i+1})$. Damit folgt, dass $\psi_n(t_n) \in \Sigma$. Dies ist aber gerade die Gleichung $fs_1 \cdots s_n = ft_1 \cdots t_n$.

Schließlich müssen wir zeigen, dass für jedes n-stellige Relationssymbol R und $s_1 \sim t_1, \dots, s_n \sim t_n$ folgt:

$$\mathfrak{H}(\Sigma) \models Rs_1 \cdots s_n \text{ gdw. } \mathfrak{H}(\Sigma) \models Rt_1 \cdots t_n.$$

Die Argumentation ist wie bei den Funktionssymbolen, unter Verwendung der Formeln $\psi_i(x) := Rt_1 \cdots t_{i-1} x s_{i+1} \cdots s_n$. Q.E.D.

Wir können also die Faktorstruktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)/\sim$ bilden. Offensichtlich wird in $\mathfrak{A}(\Sigma)$ jeder Grundterm t durch seine Kongruenzklasse interpretiert: $t^{\mathfrak{A}(\Sigma)} = [t]$. Unmittelbar aus der Definition folgt:

Lemma 4.14. Für jeden atomaren Satz ψ aus $\mathrm{FO}(\tau)$ gilt: $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \psi$ gdw. $\psi \in \Sigma$.

$\mathfrak{A}(\Sigma)$ heißt das *kanonische Modell* von Σ. Leider lässt sich Lemma 5.14 nicht direkt auf Mengen von nicht-atomaren Sätzen übertragen. Betrachte etwa die Menge $\Sigma := \{t = t : t \text{ ein Grundterm}\} \cup \{\exists x Rx\}$. Diese Menge ist trivialerweise abgeschlossen unter Substitution, enthält aber keine Aussage der Form Rt. Daher ist $R^{\mathfrak{A}(\Sigma)} = \emptyset$ und somit $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models \exists x Rx$. Analoges gilt für die Menge $\{t = t : t \text{ ein Grundterm}\} \cup \{Rx \vee Ry\}$. Man sieht aus diesen Beispielen, dass Σ neben der Abgeschlossenheit unter Substitution noch weitere Abschlusseigenschaften besitzen muss, damit $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \Sigma$ gilt.

Hintikka-Mengen und der Modell-Existenz-Satz

Sei $\Gamma \Rightarrow \Delta$ eine nicht aus Φ ableitbare Sequenz. Wir werden eine unendliche Folge von nicht aus Φ ableitbaren Sequenzen $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ konstruieren und damit eine Satzmenge gewinnen, welche $\Phi \cup \Gamma \cup \neg\Delta$ umfasst und welche hinreichende Abschlusseigenschaften besitzt, um zu garantieren, dass die dadurch definierte kanonische Struktur ein Modell von $\Phi \cup \Gamma \cup \neg\Delta$ ist.

Um den Beweis zu vereinfachen, beschränken wir uns auf reduzierte Sätze (d.h. solche, die aus den Atomen mittels $\vee, \neg$ und $\exists$ aufgebaut sind). Obwohl wir im Sequenzenkalkül auch Schlussregeln für $\wedge, \rightarrow$ und $\forall$ angegeben haben, bedeutet die Reduktion auf reduzierte Sätze keine Einschränkung der Allgemeinheit: Sei etwa $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ eine nicht-ableitbare Sequenz bestehend aus beliebigen Sätzen, und sei $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ die Sequenz, die wir erhalten, indem wir jeden Satz durch eine äquivalente reduzierte Variante ersetzen.

Zunächst überlegt man, dass auch $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ nicht ableitbar ist. Wir zeigen exemplarisch, dass die Ableitung einer Sequenz der Form $\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \Rightarrow \Delta$ aus $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$ und $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta$ mittels der Regel $(\wedge \Rightarrow)$ simuliert werden kann durch eine Ableitung der äquivalenten Sequenz $\Gamma, \neg(\neg\psi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \Delta$ mit den Regeln $(\Rightarrow \neg), (\neg \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \vee)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi} \qquad \dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg\psi \vee \neg\varphi)}}{\Gamma\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi) \Rightarrow \Delta}$$

Die Argumentation für Sequenzen mit Sätzen der Form $\psi \to \varphi$ und $\forall x \psi(x)$ ist analog.

Umgekehrt ist ein Modell von $\Gamma \cup \neg\Delta$ natürlich auch ein Modell von $\Gamma' \cup \neg\Delta'$ und erbringt damit den Nachweis, dass $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ nicht korrekt ist.

Sei nun $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$, und sei $\tau = \sigma \cup C$ für eine abzählbar unendliche Menge C von neuen Konstantensymbolen. Wir fixieren zunächst eine Aufzählung $(\varphi_0, t_0), (\varphi_1, t_1), \ldots$, in der jedes Paar (φ, t), bestehend aus einem Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ und einem Grundterm $t \in T(\tau)$, unendlich oft vorkommt, sowie eine Aufzählung $\psi_0(x_0), \psi_1(x_1), \ldots$ aller atomaren $\mathrm{FO}(\tau)$-Formeln mit genau einer freien Variablen.

Wir definieren induktiv aufsteigende Folgen $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots$ und $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \cdots$ wie folgt: Sei $\Gamma_0 := \Gamma$ und $\Delta_0 := \Delta$. Wir nehmen nun an, Γ_n und Δ_n seien bereits konstruiert und $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ sei nicht aus Φ ableitbar.

(a) Sei φ_n eine Formel aus Φ oder eine Gleichung $t = t$. Dann setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \varphi_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$.
Die Sequenz $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ ist nicht aus Φ ableitbar, denn sonst wäre auch $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ aus Φ ableitbar.

(b) Sei φ_n von der Gestalt $t = t'$. Wenn $\varphi_n \in \Gamma_n$ und ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\psi_m(t') \in \Gamma_n$, aber $\psi_m(t) \notin \Gamma_n$, dann wähle das kleinste solche m und setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi_m(t)$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$.
Die Sequenz $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ ist nicht aus Φ ableitbar, denn sonst wäre mit der Regel $(S \Rightarrow)$ auch $\Gamma_n, t = t', \psi_m(t') \Rightarrow \Delta_n$ ableitbar.

Da $t = t'$ und $\psi_m(t')$ bereits in Γ_n enthalten sind, wäre also $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ ableitbar, im Widerspruch zur Induktionsannahme.

(c) Sei $\varphi_n := \neg\psi$. Wenn $\varphi_n \in \Gamma_n$, dann setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n, \psi$. Wenn $\varphi_n \in \Delta_n$, dann setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$. Mit den Regeln $(\neg \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \neg)$ folgt, dass $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ nicht aus Φ ableitbar ist.

(d) Sei $\varphi_n = \psi \vee \vartheta$. Wenn $\varphi_n \in \Gamma_n$, dann setzen wir $\Delta_{n+1} := \Delta_n$ und können aufgrund der Regel $(\vee \Rightarrow)$ entweder $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi$ oder $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \vartheta$ so wählen, dass $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ nicht ableitbar ist. Wenn $\varphi_n \in \Delta_n$, dann setzen wir $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n, \psi, \vartheta$ und verwenden die Regel $(\Rightarrow \vee)$.

(e) Sei φ_n von der Gestalt $\exists x \psi(x)$. Wenn $\varphi_n \in \Gamma_n$, dann wähle ein $c \in C$, welches in Γ_n und Δ_n nicht vorkommt. Setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi(c)$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$. Die Sequenz $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ ist nicht ableitbar; andernfalls wäre (da c in Φ, Γ_n und Δ_n nicht vorkommt) mit der Regel $(\exists \Rightarrow)$ auch $\Gamma_n, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta_n$ und damit $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ aus Φ ableitbar.
Wenn $\varphi_n \in \Delta_n$, dann setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} = \Delta_n, \psi(t_n)$. Mit Regel $(\Rightarrow \exists)$ folgt, dass $\Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}$ nicht ableitbar ist.

In allen anderen Fällen sei $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$. Man beachte, dass aufgrund von Schritt (a) der Konstruktion $\Phi \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ gilt.

Lemma 4.15. Die Mengen $\Gamma^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ und $\Delta^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ besitzen folgende Eigenschaften:

(1) Γ^* und Δ^* sind disjunkt.

(2) Die atomaren Sätze in Γ^* sind abgeschlossen unter Substitution (gemäß Definition 5.11).

(3) Wenn $\neg\psi \in \Gamma^*$, dann ist $\psi \in \Delta^*$. Wenn $\neg\psi \in \Delta^*$, dann ist $\psi \in \Gamma^*$.

(4) Wenn $\psi \vee \vartheta \in \Gamma^*$, dann gehört ψ oder ϑ zu Γ^*. Wenn $\psi \vee \vartheta \in \Delta^*$, dann gehören ψ und ϑ zu Δ^*.

(5) Wenn $\exists x \psi(x) \in \Gamma^*$, dann gibt es einen Grundterm t, so dass $\psi(t) \in \Gamma^*$. Wenn $\exists x \psi(x) \in \Delta^*$, dann ist $\psi(t) \in \Delta^*$ für alle Grundterme t.

Beweis. Die Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Konstruktion der Sequenzen $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$:

(1) Wenn $\psi \in \Gamma^* \cap \Delta^*$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\psi \in \Gamma_n \cap \Delta_n$. Aber dann wäre $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ ein Axiom und somit ableitbar.

(2) Die Schritte (a), (b) in der Konstruktion garantieren, dass Γ^* alle Gleichungen $t = t$ enthält sowie mit $t = t'$ und $\psi(t)$ auch $\psi(t')$ für alle atomaren Formeln $\psi(x)$.

(3) Wenn $\neg\psi \in \Gamma^*$, dann gibt es (da jeder Satz in der Aufzählung $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ unendlich oft vorkommt) ein hinreichend großes n, so dass $\varphi_n = \neg\psi \in \Gamma_n$. Nach Schritt (c) der Konstruktion folgt, dass $\psi \in \Delta^*$. Der Fall, dass $\neg\psi \in \Delta^*$, wird analog behandelt.

(4) Wenn $\psi \vee \vartheta \in \Gamma^*$, dann gibt es ein n, so dass $\varphi_n = \psi \vee \vartheta \in \Gamma_n$. Nach Schritt (d) ist entweder ψ oder ϑ in Γ_{n+1}. Das Argument für $\psi \vee \vartheta \in \Delta^*$ ist analog.

(5) Wenn $\exists x \psi(x)$ in Γ^*, dann gibt es nach Schritt (e) ein c, so dass $\psi(c) \in \Gamma^*$. Wenn $\exists x \psi(x) \in \Delta^*$ und t ein beliebiger Grundterm ist, dann gibt es hinreichend große n, so dass φ_n die Formel $\exists x \psi(x)$ und t_n der Term t ist. Nach Konstruktion ist $\psi(t_n) \in \Delta_{n+1}$. Q.E.D.

Definition 4.16. Sei Γ^*, Δ^* ein Paar von Satzmengen welches die Eigenschaften (1) – (5) erfüllt. Dann heißt $\Gamma^* \cup \neg\Delta^*$ eine *Hintikka-Menge*.

Satz 4.17 (Modell-Existenz-Satz)**.** Jede Hintikka-Menge besitzt ein Modell.

Beweis. Sei $T = \Gamma^* \cup \neg\Delta^*$ eine Hintikka-Menge und Σ die Menge aller Atome in Γ^*. Nach Bedingung (2) ist Σ abgeschlossen unter Substitution. Wir behaupten, dass $\mathfrak{A}(\Sigma)$, die kanonische Struktur zu Σ, ein Modell von T ist. Dazu beweisen wir per Induktion über den Formelaufbau, dass für jeden Satz φ gilt:

- Ist $\varphi \in \Gamma^*$, so gilt $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \varphi$;
- Ist $\varphi \in \Delta^*$, so gilt $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \neg\varphi$.

(i) Für atomare Sätze ist dies bereits bewiesen (Lemma 5.14).

(ii) Sei $\varphi = \neg\psi$. Wenn $\varphi \in \Gamma^*$, dann ist $\psi \in \Delta^*$. Per Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \neg\psi$. Wenn $\varphi \in \Delta^*$, dann ist $\psi \in \Gamma^*$, also $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \psi$ und daher $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \neg\varphi$.

(iii) Sei $\varphi := \psi \vee \vartheta$. Wenn $\varphi \in \Gamma^*$, dann ist entweder ψ oder ϑ in Γ^* und damit nach Induktionsvoraussetzung wahr in $\mathfrak{A}(\Sigma)$. Wenn $\varphi \in \Delta^*$, dann sind ψ und ϑ in Δ^*, also $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \neg\varphi$.

(iv) Sei $\varphi = \exists x \psi(x)$. Wenn $\varphi \in \Gamma^*$, dann gibt es ein t, so dass $\psi(t) \in \Gamma^*$. Also gilt per Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \psi(t)$ und daher $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \exists x \psi$. Wenn $\exists x \varphi \in \Delta^*$, dann ist $\psi(t) \in \Delta^*$ und daher per Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \neg\psi(t)$ für alle t. Da jedes Element von $\mathfrak{A}(\Sigma)$ einen Grundterm interpretiert, folgt $\mathfrak{A}(\Sigma) \models \neg\exists x \psi(x)$. Q.E.D.

Wir sind ausgegangen von einer Satzmenge Φ und einer nicht aus Φ ableitbaren Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Wir haben daraus eine unendliche Folge von Sequenzen $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ konstruiert und so eine Hintikka-Menge $T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\Delta_n$ erhalten, welche $\Phi \cup \Gamma \cup \neg\Delta$ enthält. Wir haben schließlich gezeigt, dass das kanonische Modell der Atome einer Hintikka-Menge ein Modell der gesamten Hintikka-Menge ist. Insbesondere folgt also, dass $\Phi \cup \Gamma \cup \neg\Delta$ erfüllbar ist. Damit ist der Vollständigkeitssatz bewiesen.

Überabzählbare Signaturen. Wir haben hier den Vollständigkeitssatz nur für abzählbare Signaturen bewiesen. Er gilt aber auch für beliebige Signaturen (siehe etwa: H.-D Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die Mathematische Logik*, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2007, Kapitel 5).

Die Menge aller Terme über einer abzählbaren Signatur ist selbst abzählbar. Das im Beweis des Vollständigkeitssatzes konstruierte Modell einer konsistenten Satzmenge ist also abzählbar. Damit erhalten wir unmittelbar eine interessante, rein semantische Folgerung.

Satz 4.18 (Löwenheim, Skolem)**.** Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell.

Der Vollständigkeitssatz hat auch eine interessante *algorithmische* Konsequenz. Wie jeder Beweiskalkül erlaubt auch der Sequenzenkalkül die systematische Generierung aller ableitbaren Objekte. Aus dem Vollständigkeitssatz folgt demnach, dass es einen Algorithmus gibt, der alle allgemeingültigen FO(τ)-Sätze aufzählt. Dies bedeutet allerdings nicht, dass man einen Algorithmus zur Verfügung hätte, mit dem man zu jedem vorgelegten FO(τ)-Satz entscheiden könnte, ob dieser allgemeingültig ist: Sei etwa ψ der gegebene Satz. Man kann nun systematisch alle allgemeingültigen Sätze $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ aufzählen. Wenn ψ tatsächlich allgemeingültig ist, wird man irgendwann ein $\varphi_j := \psi$ erhalten und hat damit die richtige Antwort. Wenn aber ψ nicht allgemeingültig ist, dann kann man dies durch ein solches Aufzählungsverfahren nicht feststellen.

Schnitt-Elimination. Sequenzenkalküle gibt es in vielen verschiedenen Varianten. Interessant ist insbesondere die Erweiterung um die sogenannte *Schnittregel:*

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Diese Regel ist eine Variante des *Modus Ponens*, welcher in andern Beweiskalkülen verwendet wird und die Ableitung von φ erlaubt, wenn vorher ψ und $\psi \to \varphi$ bewiesen wurden. Die Schnittregel erlaubt es, aus längeren Sequenzen kürzere abzuleiten. Beweise mit Schnittregel können sehr viel kürzer sein als solche ohne Schnitte, aber eine systematische Beweissuche und -analyse ist kaum mehr möglich. Gentzen formulierte seinen Sequenzenkalkül ursprünglich mit Schnittregel und bewies dann seinen berühmten *Schnitt-Eliminationssatz*, welcher besagt, dass beliebige Beweise durch solche ohne Schnitte simuliert werden können. Da wir hier direkt die Vollständigkeit des Sequenzenkalküls ohne Schnittregel bewiesen haben, kann man sich diesen (sehr aufwendigen) Beweis sparen.

4.4 Der Kompaktheitssatz

Der Vollständigkeitssatz schafft eine Brücke zwischen Syntax und Semantik der Prädikatenlogik und erlaubt es, Eigenschaften der Ableitungsbeziehung und der Konsistenz (also syntaktischer Begriffe) auf die Folgerungsbeziehung und die Erfüllbarkeit (also semantische Begriffe) zu übertragen. Die wichtigste Folgerung aus dem Vollständigkeitssatz ist der Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz.

Satz 4.19 (Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik)**.** Für jede Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ und jedes $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$

(i) $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert, so dass $\Phi_0 \models \psi$.
(ii) Φ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

Beweis. Aus der Definition der Ableitungsbeziehung folgen die entsprechenden syntaktischen Aussagen unmittelbar:

(i) $\Phi \vdash \psi$ genau dann, wenn $\Phi_0 \vdash \psi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.
(ii) Φ ist genau dann konsistent, wenn jede endliche Teilmenge von Φ konsistent ist.

Da nach dem Vollständigkeitssatz eine Formelmenge genau dann erfüllbar ist, wenn sie konsistent ist, und die Folgerungsbeziehung $\models$ mit der Ableitungsbeziehung $\vdash$ zusammenfällt, ergeben sich die semantischen Aussagen des Kompaktheitssatzes. Q.E.D.

In Kapitel 3.1 haben wir gesehen, dass die Klasse aller Körper mit Charakteristik p durch den Satz $\psi_{\text{Körper}} \wedge \chi_p$ endlich axiomatisiert wird, wobei $\psi_{\text{Körper}}$ die Konjunktion der Körperaxiome und χ_p der Satz $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p\text{-mal}} = 0$ ist.

Für Körper der Charakteristik 0 haben wir das unendliche Axiomensystem

$$\Phi_0 = \{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\neg\chi_p : p \text{ Primzahl}\}$$

angegeben. Aus dem Kompaktheitssatz können wir nun folgern, dass *jedes* Axiomensystem für diese Klasse unendlich sein muss.

Satz 4.20. Die Klasse der Körper der Charakteristik 0 ist nicht endlich axiomatisierbar.

Beweis. Sei $\psi \in \mathrm{FO}(\tau_{\mathrm{ar}})$ ein beliebiger Satz, welcher in allen Körpern der Charakteristik 0 gilt; also $\Phi_0 \models \psi$. Aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass es eine Primzahl q gibt, so dass bereits

$$\{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\neg\chi_p : p < q, p \text{ Primzahl}\} \models \psi.$$

Also gilt ψ auch in allen Körpern mit hinreichend großer Charakteristik und axiomatisiert somit nicht die Körper der Charakteristik 0. Q.E.D.

Satz 4.21. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Satzmenge mit beliebig großen endlichen Modellen (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi$ mit endlichem $\mathfrak{A}$ und $|\mathfrak{A}| > n$). Dann hat Φ auch ein unendliches Modell.

Beweis. Sei $\Theta := \Phi \cup \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$, wobei

$$\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \,.$$

Die Modelle von Θ sind gerade die unendlichen Modelle von Φ.

Es genügt zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge $\Theta_0 \subseteq \Theta$ erfüllbar ist, denn mit dem Kompaktheitssatz folgt dann, dass auch Θ erfüllbar ist. Für jedes endliche $\Theta_0 \subseteq \Theta$ gibt es aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \{\varphi_{\geq n} : n < n_0\}$. Da nach Voraussetzung Φ beliebig große endliche Modelle hat, ist Θ_0 erfüllbar. Q.E.D.

Folgerung 4.22. Die Klasse aller endlichen τ-Strukturen ist nicht FO-axiomatisierbar.

Ebenso folgt, dass die Klasse aller endlichen Gruppen, die Klasse aller endlichen Körper, die Klassen aller endlichen Graphen etc. nicht FO-axiomatisierbar sind.

Weitere Überlegungen, wieder mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, zeigen uns, dass jedes Axiomensystem, welches ein unendliches Modell hat, sogar beliebig große unendliche Modelle zulässt.

Definition 4.23. Seien A, B zwei Mengen. Wir sagen, dass A *mindestens so mächtig* wie B ist (kurz: $|A| \geq |B|$), wenn eine *injektive* Funktion $f : B \to A$ existiert. Weiter sagen wir, dass A und B *gleich mächtig* sind (kurz: $|A| = |B|$), wenn eine *bijektive* Funktion $f : A \to B$ existiert.

Für eine Menge A bezeichnen wir mit $\mathrm{Pot}(A) := \{B : B \subseteq A\}$ die *Potenzmenge* von A.

Satz 4.24. Keine Menge ist gleich mächtig zu ihrer Potenzmenge.

Beweis. Wir zeigen, dass keine Funktion $f : A \to \mathrm{Pot}(A)$ surjektiv sein kann. Zu diesem Zweck betrachten wir für ein beliebiges solches f die Menge $B_f := \{a \in A : a \notin f(a)\}$.

Wir behaupten, dass B_f nicht im Bild von f ist. Sonst wäre $f(b) = B_f$ für ein $b \in A$. Dies kann aber nicht sein, da dann

$$b \in f(b) \text{ gdw. } b \in B_f \text{ gdw. } b \notin f(b)\,.$$

Die erste Äquivalenz folgt da $f(b) = B_f$, die zweite aus der Definition von B_f. Q.E.D.

Satz 4.25 (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem)**.** Φ besitze ein unendliches Modell. Dann gibt es zu jeder Menge M ein Modell $\mathfrak{D} \models \Phi$ über einem Universum D, welches mindestens so mächtig wie M ist.

Beweis. Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ und sei $\{c_m : m \in M\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Konstantensymbolen, welche nicht zu τ gehören. Setze

$$\Theta := \Phi \cup \{c_m \neq c_n : m, n \in M, m \neq n\}.$$

Wir zeigen, dass Θ erfüllbar ist. Wegen des Kompaktheitssatzes genügt es zu zeigen, dass für jede endliche Teilmengen $M_0 \subseteq M$ die Formelmenge

$$\Theta_0 := \Phi \cup \{c_m \neq c_n : m, n \in M_0, m \neq n\}$$

erfüllbar ist.

Nach Voraussetzung gibt es ein unendliches Modell $\mathfrak{B} \models \Phi$. Da M_0 endlich ist, können wir in B paarweise verschiedene Elemente b_m für alle $m \in M_0$ auswählen. Sei $\mathfrak{A}$ die Expansion von $\mathfrak{B}$ durch die Konstanten $c_m^{\mathfrak{A}} := b_m$ für $m \in M_0$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{A} \models \Theta_0$.

Damit ist gezeigt, dass Θ erfüllbar ist. Sei $\mathfrak{D}$ ein Modell von Θ mit Universum D. Die Abbildung $f : M \to D$ mit $f(m) = c_m^{\mathfrak{D}}$ ist injektiv, da für $m \neq n$ aus M gilt: $\mathfrak{D} \models c_m \neq c_n$. Da $\mathfrak{D} \models \Theta$, gilt insbesondere auch $\mathfrak{D} \models \Phi$. Q.E.D.

Wir erinnern daran, dass die *Theorie* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ aus allen Sätzen $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathfrak{A} \models \psi$ besteht, und dass zwei Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elementar äquivalent sind (kurz: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn sie die gleiche Theorie haben.

Lemma 4.26. $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\}$ ist die kleinste axiomatisierbare Modellklasse, die $\mathfrak{A}$ enthält.

Beweis. Offensichtlich ist $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$ und somit axiomatisierbar. Wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann gilt offensichtlich auch $\mathfrak{B} \models \Phi$. Also gilt für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$: Wenn $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\Phi)$, dann ist $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\} \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi)$. Q.E.D.

Nach dem Isomorphielemma sind isomorphe Strukturen auch elementar äquivalent. Die Umkehrung gilt für unendliche Strukturen im Allgemeinen nicht.

Satz 4.27. Sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche Struktur. Dann gibt es eine Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$. Insbesondere ist die Isomorphieklasse $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}\}$ von $\mathfrak{A}$ nicht axiomatisierbar in der Prädikatenlogik.

Beweis. $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ besitzt ein unendliches Modell, und deshalb nach dem aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem auch ein Modell $\mathfrak{B}$, das mindestens die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathrm{Pot}(A)$ von A hat. Nach Satz 5.24 ist $\mathfrak{B}$ nicht gleich mächtig zu $\mathfrak{A}$ und deshalb insbesondere auch nicht isomorph zu $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ (und $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ vollständig ist), ist aber $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$. Also liegt in jeder axiomatisierbaren Modellklasse, welche $\mathfrak{A}$ enthält, auch eine zu $\mathfrak{A}$ nicht-isomorphe Struktur. Q.E.D.

Nichtstandardmodelle der Arithmetik. Die *Arithmetik* ist die Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ der Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Ein *Nichtstandardmodell* der Arithmetik ist eine τ_{ar}-Struktur, die zu $\mathfrak{N}$ zwar elementar äquivalent aber nicht isomorph ist.

Aus dem aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem folgt: Es gibt ein (überabzählbares) Nichtstandardmodell der Arithmetik. Ein schärferes Resultat liefert der folgende Satz von Skolem.

Satz 4.28 (Skolem)**.** Es gibt ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Beweis. Sei $\Phi := \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{c \neq \underline{n} : n \in \mathbb{N}\}$, wobei c ein neues Konstantensymbol ist, $\underline{0} := 0$ und $\underline{n} := \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}$ für $n \geq 1$.

Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ besitzt ein Modell $\mathfrak{A} = (\mathfrak{N}, c^{\mathfrak{A}})$ mit hinreichend großem $c^{\mathfrak{A}} \in \mathbb{N}$. Also ist nach dem Kompaktheitssatz Φ erfüllbar und hat daher nach dem Satz von Löwenheim-Skolem sogar ein abzählbares Modell $\mathfrak{B}$. Sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \restriction \tau_{\mathrm{ar}}$ (das durch Weglassen von $c^{\mathfrak{B}}$ definierte Redukt von $\mathfrak{B}$). Da $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, ist $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{C}$.

Es bleibt zu zeigen, dass kein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{C}$ existiert. Für jeden solchen Isomorphismus π müsste gelten, dass $\pi(n) = \pi(\underline{n}^{\mathfrak{N}}) = \underline{n}^{\mathfrak{B}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da π surjektiv ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $c^{\mathfrak{B}} = \pi(k) = \underline{k}^{\mathfrak{B}}$. Damit erhalten wir einen Widerspruch: Einerseits gilt $\mathfrak{B} \models c = \underline{k}$, aber andererseits, da die Formel $c \neq \underline{k}$ in Φ enthalten ist, auch $\mathfrak{B} \models c \neq \underline{k}$. Q.E.D.

Übung 4.2. Sei $\mathfrak{A}$ ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik, sei $\varphi(x, y)$ die Formel $x \neq y \wedge \exists z(x + z = y)$ und sei $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}}) := (\mathfrak{A}, \varphi^{\mathfrak{A}})$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}})$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, <)$ ist (also ein abzählbares Nichtstandardmodell der geordneten Arithmetik).
(b) Zeigen sie, dass $(A, <^{\mathfrak{A}})$ keine Wohlordnung ist (also eine unendliche absteigende Kette enthält).
(c) Beschreiben Sie die Ordnungsstruktur von $(A, <^{\mathfrak{A}})$: Betrachten Sie die Ordnung $(B, <^{B})$ mit $B = \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^{>0}$ und $(a, b) <^{B} (a', b')$, wenn $b < b'$ oder wenn $b = b'$ und $a < a'$; also informell:

$(B, <^B)$ ist zusammengesetzt aus $(\mathbb{N}, <)$ und dahinter abzählbar vielen, dicht hintereinanderliegenden Kopien von $(\mathbb{Z}, <)$. Zeigen Sie, dass es eine Einbettung von $(B, <^B)$ in $(A, <^{\mathfrak{A}})$ gibt.

Übung 4.3. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorophe abzählbare Modelle der Arithmetik gibt.

Hinweis: Sei $\varphi(x, y) := \exists z(x \cdot z = y)$. Die Primteiler eines Elements a eines Nichtstandardmodells $\mathfrak{A}$ der Arithmetik seien die Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi[\underline{p}, a]$. Zeigen Sie, dass es zu jeder Menge Q von Primzahlen ein abzählbares Nichtstandardmodell $\mathfrak{A}$ der Arithmetik gibt, welches ein Element a enthält, dessen Primteiler genau die Elemente von Q sind.

Warum der Kompaktheitssatz so heisst. Sei τ eine beliebige Signatur und S die Menge aller vollständigen τ-Theorien. Wir definieren eine Topologie auf S, deren Basis aus den Mengen $\mathcal{O}_\psi := \{T \in S : \psi \in T\}$ für alle Sätze $\psi \in FO(\tau)$ besteht. Man beachte, dass $\mathcal{O}_\psi \cap \mathcal{O}_\varphi = \mathcal{O}_{\psi \wedge \varphi}$. Ferner ist $S \setminus \mathcal{O}_\psi = \{T \in S : \psi \notin T\} = \{T \in S : \neg\psi \in T\} = \mathcal{O}_{\neg\psi}$.

Die Basis der Topologie besteht also aus offen-abgeschlossenen Mengen. Zudem ist S hausdorffsch, d.h. je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch disjunkte Umgebungen trennen. Zu zwei beliebigen vollständigen Theorien $T \neq T'$ gibt es nämlich einen Satz ψ mit $\psi \in T, \neg\psi \in T'$ und daher $T \in \mathcal{O}_\psi, T' \in \mathcal{O}_{\neg\psi}$ und natürlich $\mathcal{O}_\psi \cap \mathcal{O}_{\neg\psi} = \emptyset$.

Die offenen Mengen von S sind die Mengen der Form $\bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{O}_\varphi$, die abgeschlossenen diejenigen der Form $\bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{O}_\varphi$ (für beliebige Satzmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$).

Der Kompaktheitssatz besagt nun, dass der topologische Raum S *kompakt* ist, d.h. dass jede offene Überdeckung von S eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dies zeigt man wie folgt.

Jede offene Überdeckung von S kann zu einer Überdeckung der Form $\bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{O}_\varphi$ verfeinert werden (für eine geeignete Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$). Also ist $\emptyset = S \setminus \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{O}_\varphi = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathcal{O}_{\neg\varphi}$.

Daher lässt sich die Satzmenge $\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$ nicht zu einer vollständigen Theorie erweitern und ist somit unerfüllbar. Nach dem

Kompaktheitssatz ist bereits $\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$ für ein endliches $\Phi_0 \in \Phi$ unerfüllbar. Folglich ist $S = S \setminus \bigcap_{\varphi \in \Phi_0} \mathcal{O}_{\neg\varphi} = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} \mathcal{O}_\varphi$.

4.5 Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Das klassische Entscheidungsproblem der mathematischen Logik kann auf verschiedene, äquivalente Weisen formuliert werden:

Erfüllbarkeit: Man konstruiere einen Algorithmus, welcher zu jeder vorgelegten Formel der Prädikatenlogik entscheidet, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

Gültigkeit: Man finde einen Algorithmus, welcher zu jeder Formel ψ der Prädikatenlogik entscheidet, ob sie allgemeingültig ist, d.h. ob jede zu ψ passende Interpretation ein Modell von ψ ist.

Beweisbarkeit: Man konstruiere einen Algorithmus, welcher zu jeder Formel $\psi \in \mathrm{FO}$ entscheidet, ob ψ (aus der leeren Hypothesenmenge) ableitbar ist. (Hier wird ein fester, vollständiger Beweiskalkül für die Prädikatenlogik zugrunde gelegt, z.B. der Sequenzenkalkül).

Die Äquivalenz dieser Probleme ist unmittelbar einsichtig: Eine Formel ψ ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg\psi$ nicht allgemeingültig ist, und nach dem Vollständigkeitssatz ist eine Formel genau dann allgemeingültig, wenn sie ableitbar ist.

Das klassische Entscheidungsproblem wurde zu Beginn dieses Jahrhundert von Hilbert formuliert und war Teil seines formalistischen Programms zur Lösung der Grundlagenprobleme der Mathematik. Hilbert und Ackermann schrieben:

> Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt. (...) Das Entscheidungsproblem muss als das Hauptproblem der mathematischen Logik bezeichnet werden.
>
> *D. Hilbert, W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, 1. Auflage, Berlin 1928, S. 73ff.*

In der Tat hätte eine positive Lösung des Entscheidungsproblems weitreichende Folgen für die Mathematik. Man könnte dann, mindestens im Prinzip, zahlreiche offene Probleme der Mathematik (z.B. die Riemann-Hypothese) durch Anwendung des Entscheidungsalgorithmus lösen.

Für gewisse *Teilklassen* der Prädikatenlogik können solche Entscheidungsalgorithmen angegeben werden.

Übung 4.4. Man konstruiere einen Algorithmus, welcher das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln löst, deren Signatur ausschließlich aus monadischen (d.h. einstelligen) Relationssymbolen besteht.

Hinweis: Man zeige, z.B. mit Hilfe des Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels, dass jede erfüllbare Formel mit Quantorenrang m und q monadischen Relationssymbolen ein Modell mit höchstens $m \cdot 2^q$ Elementen besitzt.

Übung 4.5. Zeigen sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln der Gestalt $\exists x_1 \dots \exists x_r \forall y_1 \dots \forall y_s \varphi$ entscheidbar ist, wobei φ quantorenfrei und relational sein soll.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jeder erfüllbare Satz dieser Gestalt ein Modell mit höchstens r Elementen besitzt.

Übung 4.6. Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für existentielle Formeln (mit beliebiger Signatur) entscheidbar ist.

1936/37 haben Church und Turing unabhängig voneinander bewiesen, dass das Entscheidungsproblem nicht algorithmisch lösbar ist. Im Gegensatz zur Aussagenlogik ist das Erfüllbarkeitsproblem für die Prädikatenlogik also unentscheidbar.

Wir beweisen die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik, indem wir ein bekanntes unentscheidbares Problem, das *Postsche Korrespondenzproblem*, auf das Gültigkeitsproblem für FO reduzieren.

Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP). Unter dem PCP versteht man das folgende Entscheidungsproblem.

Gegeben: Eine Folge $F = (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$ von Wortpaaren mit $u_i, v_i \in \{0,1\}^*$.

Frage: Gibt es eine Indexfolge $i_1, \dots, i_l$ so dass $u_{i_1} \cdots u_{i_l} = v_{i_1} \cdots v_{i_l}$?
(Eine solche Indexfolge nennen wir eine Lösung für F.)
Es ist bekannt (und wird z.B. in der Vorlesung *Berechenbarkeit und Komplexität* bewiesen), dass es keinen Algorithmus gibt, der das PCP löst.

Satz 4.29 (Post)**.** Das PCP ist unentscheidbar.

Wir zeigen, dass man Eingaben für das PCP durch einen Reduktionsalgorithmus in FO-Formeln transformieren kann, so dass die gegebene PCP-Eingabe genau dann eine Lösung zulässt, wenn die resultierende FO-Formel allgemeingültig ist. Daraus folgt, dass kein Algorithmus die Gültigkeit von FO-Formeln entscheiden kann. Gäbe es nämlich einen solchen Entscheidungsalgorithmus, dann könnte man das PCP-Problem lösen, indem man PCP-Eingaben mit dem Reduktionsalgorithmus auf FO-Formeln transformiert und dann mit dem Entscheidungsalgorithmus bestimmt, ob die erhaltene Formel allgemeingültig ist.

Satz 4.30 (Church, Turing)**.** Das Gültigkeitsproblem (und damit auch das Erfüllbarkeitsproblem) der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis. Wir zeigen, dass man zu jeder Eingabe $F = (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$ für das PCP effektiv einen FO-Satz ψ_F konstruieren kann, so dass gilt:

ψ_F ist gültig gdw. es gibt eine Lösung für F.

Die Signatur von ψ_F besteht aus einem Konstantensymbol c, einstelligen Funktionssymbolen f_0 und f_1 und einem zweistelligen Relationssymbol P. Die Idee ist, dass man jedes Wort $w = w_0 w_1 \cdots w_{m-1} \in \{0,1\}^*$ durch den Term $t_w(x) := f_{w_0} f_{w_1} \cdots f_{w_{m-1}} x$ repräsentiert und die Lösbarkeitsbedingung für F durch die Formel

$$\psi_F := (\varphi \wedge \vartheta) \rightarrow \exists x P x x$$

mit

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^{k} P(t_{u_i} c, t_{v_i} c) \text{ und}$$

$$\vartheta := \forall x \forall y (Pxy \to \bigwedge_{i=1}^{k} P(t_{u_i}x, t_{v_i}y))$$

ausdrückt.

Nehmen wir zunächt an ψ_F sei gültig. Dann gilt ψ_F in jeder zu der Formel passenden Struktur, insbesondere also in $\mathfrak{A} = (A, c, f_0, f_1, P)$ mit

$$\begin{aligned}
A &:= \{0,1\}^*, \\
c &:= \varepsilon \text{ (das leere Wort)}, \\
f_0(w) &:= 0w \text{ für alle } w \in \{0,1\}^*, \\
f_1(w) &:= 1w \text{ für alle } w \in \{0,1\}^* \text{ und} \\
P &:= \{(u,v) : \text{ es gibt } i_1, \dots, i_l \text{ mit} \\
&\qquad\qquad u = u_{i_1} \cdots u_{i_l} \text{ und } v = v_{i_1} \cdots v_{i_l}\}.
\end{aligned}$$

Ein Wortpaar (u, v) ist also genau dann in P, wenn u mit derselben Indexfolge aus den u_i aufgebaut werden kann wie v aus den v_i. Man beachte, dass für jedes $w \in \{0,1\}^*$ der Wert des Grundterms $t_w c$ in $\mathfrak{A}$ gerade das Wort w selbst ist, d.h. $[\![t_w c]\!]^{\mathfrak{A}} = w$. Also gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$. Weiter gilt $[\![t_u t_w c]\!]^{\mathfrak{A}} = uw$ für alle $u, w \in \{0,1\}^*$. Daher folgt $\mathfrak{A} \models \vartheta$. Da $\mathfrak{A} \models \psi_F$, muss auch $\mathfrak{A} \models \exists x Pxx$ gelten. Also gibt es ein Wort z und eine Indexfolge $i_1, \dots, i_l$ mit $z = u_{i_1} \cdots u_{i_l} = v_{i_1} \cdots v_{i_l}$, d.h. $i_1, \dots, i_l$ ist eine Lösung für F.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass F eine Lösung $i_1, \dots, i_l$ besitzt. Zu zeigen ist, dass $\mathfrak{A} \models \psi_F$ für jede zu ψ_F passende Struktur $\mathfrak{A} = (A, c, f_0, f_1, P)$. Wir nehmen also an, dass $\mathfrak{A} \models \varphi \land \vartheta$ (anderenfalls gilt $\mathfrak{A} \models \psi_F$ ohnehin) und betrachten die Abbildung $h : \{0,1\}^* \to A$, welche jedem Wort $w \in \{0,1\}^*$ den Wert $h(w) := [\![t_w c]\!]^{\mathfrak{A}}$ zuordnet. Insbesondere gilt $h(\varepsilon) = c$, $h(0w) = f_0(h(w))$ und $h(1w) = f_1(h(w))$. Da $\mathfrak{A} \models \varphi$, gilt $(h(u_i), h(v_i)) \in P$ für $i = 1, \dots, k$. Wegen $\mathfrak{A} \models \vartheta$ gilt für $i = 1, \dots, k$, dass aus $(x, y) \in P$ auch $(h(u_i x), h(v_i y)) \in P$ folgt. Per Induktion schließen wir, dass $(h(u_{i_1} \cdots u_{i_l}), h(v_{i_1} \cdots v_{i_l})) \in P$ gilt, d.h. für die Lösung $w = u_{i_1} \cdots u_{i_l} = v_{i_1} \cdots v_{i_l}$ folgt $(h(w), h(w)) \in P$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{A} \models \exists x Pxx$ und somit $\mathfrak{A} \models \psi_F$. Q.E.D.