**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

# 2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 24.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

**Hinweis:** Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

## Aufgabe 1 — 10 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass (i) $\{\neg, \leftrightarrow\}$ bzw. (ii) $\{\downarrow\}$ funktional vollständig sind, wobei $X \downarrow Y \equiv \neg X \wedge \neg Y$.
*Hinweis zu (i):* Sei $\varphi$ eine Formel, in der als Operatoren nur $\neg$ und $\leftrightarrow$ vorkommen. Sei $\#(X, \varphi)$ die Anzahl der Vorkommen von $X$ in $\varphi$. Für eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \tau \to \{0,1\}$ sei $\mathcal{I}_X : \tau \to \{0,1\}$ definiert durch

$$\mathcal{I}_X(Y) = \begin{cases} 1 - \mathcal{I}(Y), & Y = X \\ \mathcal{I}(Y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\#(X, \varphi)$ ungerade genau dann gilt, wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 - [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}_X}$.

(b) Sei $f \in B^3$ die durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} y, & \text{falls } x = 0 \\ z, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

definierte Boolesche Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{f, 0, 1\}$ funktional vollständig ist.

## Aufgabe 2 — 20 Punkte

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob die folgende Formel erfüllbar ist. Geben Sie als Zwischenschritte die Mengen der markierten Variablen an.

$$\begin{aligned} &(A \wedge B \to 0) \wedge (E \wedge F \to C) \wedge (1 \to A) \wedge (1 \to F) \wedge (A \to E) \wedge (C \to G) \\ &\qquad \wedge (E \wedge G \wedge A \to H) \wedge (H \to E) \wedge (A \wedge F \wedge H \to B) \end{aligned}$$

(b) Für zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\colon \tau \to \{0,1\}$ sind die Operationen wie folgt definiert:

**Schnitt:** $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2(X) := \min(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X))$

**Vereinigung:** $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2(X) := \max(\mathcal{I}_1(X), \mathcal{I}_2(X))$

**Komplement:** $\neg\mathcal{I}_1(X) := 1 - \mathcal{I}_1(X)$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter (i) Schnitt, (ii) Vereinigung, (iii) Komplement abgeschlossen sind, d.h. wenn $\varphi$ eine Horn-Formel ist, und $\mathcal{I}_1 \models \varphi, \mathcal{I}_2 \models \varphi$, gilt dann auch (i) $(\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2) \models \varphi$, (ii) $(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2) \models \varphi$, (iii) $\neg\mathcal{I}_1 \models \varphi$?

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Horn-Formel ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt. Gilt auch die Umkehrung, also ist jede Formel, die ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt, äquivalent zu einer Horn-Formel? *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel. *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(i) $(X \wedge Y) \rightarrow (Z \vee Q)$;

(ii) $X \wedge \neg(\neg Y \rightarrow (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \rightarrow (Y \vee \neg Z))$;

(iii) $(X \vee \neg X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (X \rightarrow (Y \wedge Z))$.

**Aufgabe 3** 10 Punkte

(a) Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln, um zu überprüfen, ob die folgende Folgerungsbeziehung gilt.

$$\{A \wedge F \rightarrow D,\ E \wedge F \rightarrow B,\ C \wedge A \rightarrow E,\ A \wedge E \rightarrow F\} \models \neg A \vee (C \rightarrow D)$$

(b) Seien $\Phi, \Psi$ Mengen von AL-Formeln, und seien $\varphi, \psi, \vartheta$ AL-Formeln.

(i) Wenn $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ gilt, gelten dann auch (1) $\{\varphi \vee \psi\} \models \vartheta$ und (2) $\{\varphi \wedge \psi\} \models \vartheta$?

(ii) Wenn $\Phi \not\models \varphi$ gilt, gilt dann $\Phi \models \neg\varphi$?

(iii) Wenn $\Phi \models \neg\varphi$ gilt, gilt dann $\Phi \not\models \varphi$?

(iv) Seien $\Phi, \Psi$ erfüllbar, so dass für alle AL-Formeln $\varphi$ gilt, dass wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Psi \models \varphi$. Gilt dann $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$?

**Aufgabe 4*** 10* Punkte

Beweisen Sie das *aussagenlogische Interpolationstheorem*: Sei $\psi \rightarrow \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Dann existiert eine aussagenlogische Formel $\vartheta$ mit $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$, so dass $\psi \rightarrow \vartheta$ und $\vartheta \rightarrow \varphi$ Tautologien sind. *Hinweis:* Führen Sie einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in $\psi$, aber nicht in $\varphi$ vorkommen, also über $|\tau(\psi) \setminus \tau(\varphi)|$.