Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den **29.05.** um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $M \subseteq A$ eine Teilmenge des Universums. Die von M *induzierte* Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist die kleinste Substruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $M \subseteq B$.

(a) Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Überprüfen Sie für die folgenden Mengen, ob sie Universum einer Substruktur von $\mathfrak{N}$ sind, und wenn nicht, bestimmen Sie die von ihnen induzierte Substruktur.

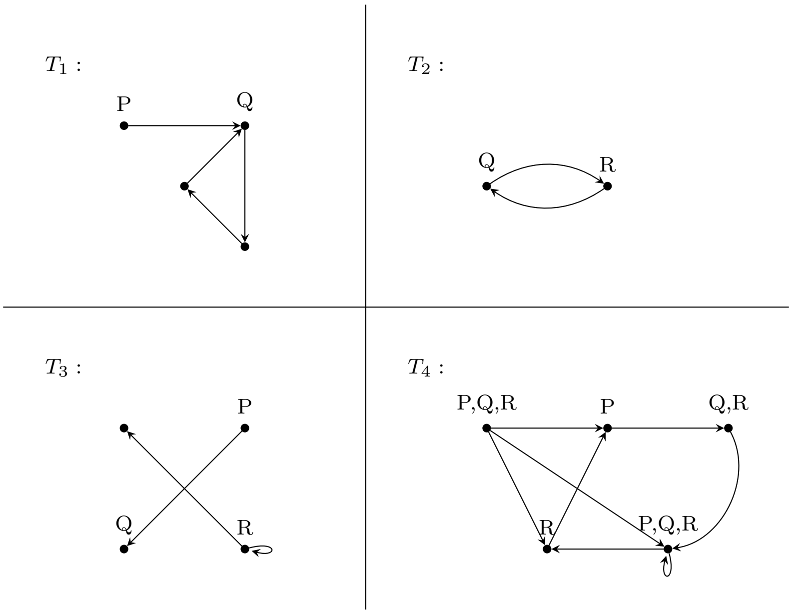
(i) $\{0\}$ (ii) $\{0, 1\}$ (iii) $\{2, 3\}$ (iv) $\{n \mid n \text{ gerade}\}$

(b) Sei τ eine Signatur und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $A \subseteq B$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ genau dann gilt, wenn für alle quantorenfreien Formeln $\vartheta(x_1, \cdots, x_k) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \cdots, a_k \in A$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \vartheta(a_1, \cdots, a_k) \quad \text{gdw.} \quad \mathfrak{B} \models \vartheta(a_1, \cdots, a_k).$$

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Wir betrachten die folgenden Transitionssysteme $T_i = (V, E, P, Q, R)$, $1 \leq i \leq 4$, mit einstelligen Relationen P, Q, R, also gerichtete Graphen mit Knotenbeschriftungen:



Beschreiben Sie die Aussagen der Sätze $\varphi_1, \cdots, \varphi_5$ in Worten und bestimmen Sie, in welchen der Transitionssysteme $T_1, \cdots, T_4$ sie gelten (kurze Begründung!).

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \exists y (Rx \to Qy) \\
\varphi_2 &:= \forall x \exists y (Rx \to (Exy \land Qy)) \\
\varphi_3 &:= \exists x \exists y \exists z \exists u (Exy \land Eyz \land Ezu \land Eux) \\
\varphi_4 &:= \exists x (Px \land \forall y (\neg Eyx)) \land \forall z (Rz \to Ezz) \\
\varphi_5 &:= \forall x ((Qx \land Px) \to \exists y \exists z \forall q ((Ry \land Pz) \to (Qq \lor Rq))
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 10 Punkte

Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, \mathbb{Z}^{\mathfrak{R}})$ der Signatur $\tau = \{+, \cdot, \mathbb{Z}\}$, wobei $+^{\mathfrak{R}}$ der üblichen Addition und $\cdot^{\mathfrak{R}}$ der üblichen Multiplikation entspricht, und $r \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{R}}$ genau dann gilt, wenn r eine ganze Zahl ist.

(a) Drücken Sie die folgenden Sachverhalte in $\mathrm{FO}(\tau)$ aus. Achten Sie dabei auf die freien Variablen.

(i) $x = -1$ (ii) $0 \leq x < y$ (iii) x rational (iv) $x = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es für jedes Element $r \in \mathbb{R}$ eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\tau)$ gibt, welche r definiert, also so, dass für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} \models \varphi(s) \quad \text{gdw.} \quad s = r.$$