Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 5.6. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Geben Sie endliche Axiomensysteme für die folgenden Klassen von Strukturen an, wobei f ein 1-stelliges Funktionssymbol und R eine 2-stellige Relation ist.

(a) $\{(A, f) \mid f \text{ ist surjektiv}\}$

(b) $\{(A, f) \mid |\text{Bild}(f)| < 4\}$

(c) $\{(A, R) \mid R = A^2 \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}\}$

(d) $\{(A, R) \mid R \text{ ist der Graph einer injektiven Funktion}\}$, wobei der Graph einer 1-stelligen Funktion g die Relation $\{(a, g(a)) \mid a \in A\}$ ist.

(e) $\{(A, R, f) \mid R = f^{-1}\}$

(f) $\{(A, R, f) \mid R \text{ ist eine lineare Ordnung } <, \text{ und wenn } f(a) = b \text{ gilt, dann ist } b < a\}$

(g) $\{(A, R, f) \mid R \text{ ist eine Kongruenzrelation von } (A, f)\}$, wobei eine Kongruenzrelation eine Äquivalenzrelation ist, die verträglich mit den Funktionen ist, also hier: Wenn a und b äquivalent sind, dann sind auch $f(a)$ und $f(b)$ äquivalent.

Aufgabe 2 10 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen für beliebige Signaturen τ, Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau)$ und Formeln $\varphi, \psi \in \text{FO}(\tau)$ gelten.

(a) Wenn $\Phi \models \varphi \rightarrow \psi$, dann gilt $\varphi \in \Phi$.

(b) Wenn $\varphi \notin \Phi$ und $\varphi \not\equiv \psi$, dann gilt $\Phi \models \varphi$ oder $\Phi \models \varphi \rightarrow \psi$.

(c) Wenn $\Phi \not\models \varphi \rightarrow \psi$, dann ist $\Phi \cup \{\varphi\}$ erfüllbar.

(d) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$, dann ist $\Phi \cup \{\varphi, \psi\}$ erfüllbar.

(e) Wenn $\forall x\varphi \equiv \forall x\psi$, dann auch $\exists x\varphi \equiv \exists x\psi$.

(f) Sei Φ erfüllbar, und sei x eine Variable, die in Φ nicht frei vorkommt. Sei x weiter die einzige freie Variable von φ. Wenn $\Phi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \forall x\varphi$ und $\Phi \models \exists x\varphi$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Bringen Sie die folgenden beiden Formeln in (i) Negationsnormalform, und (ii) Pränex-Normalform.

(a) $\exists x \neg \forall y \exists z (Rxx \rightarrow (\exists y \forall z (Rzz \land Tyy))) \lor \neg \forall y \neg \forall z (\neg Tzz)$

(b) $(\forall x \exists y (Rxy \land \forall y (Tyy) \land \exists z \forall x (Qy \lor (Tx \rightarrow \neg Qz)))) \lor Rxz \lor \forall z ((Qz \land Tz) \rightarrow \exists y Ryy)$

(c) $\neg\left(\left(\forall x \neg\left(Rxy \land \exists y\left(\neg \forall z\left(Rzz \land Ty\right)\right)\right) \rightarrow Qx\right) \lor \forall y \exists z\left(\left(Qz \lor Ty\right) \rightarrow \exists x Rxx\right)\right)$