**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

# 8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 12.6. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

*Hinweis:* Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Zusatzaufgaben und geben Zusatzpunkte. Die Aufgaben sind nicht zwingend schwieriger, aber dafür interessanter.

**Aufgabe 1*** 10* Punkte

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass jeder erfüllbare FO-Satz ein abzählbares Modell besitzt. Sei $\tau$ eine beliebige Signatur, $\tau_0 \subseteq \tau$ eine endliche Teilmenge und $\mathfrak{B}$ eine $\tau_0$-Struktur.

(a) Zeigen Sie, dass für jede nicht-leere endliche Teilmenge $M \subseteq B$ eine abzählbare minimale Substruktur $\mathfrak{A}_M \subseteq \mathfrak{B}$ existiert, deren Universum $M$ enthält. (Mit anderen Worten: Die von $M$ induzierte Substruktur ist abzählbar.)

(b) Sei $\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_k\, \eta \in \mathrm{FO}(\tau_0)$ ein Satz, wobei $\eta$ quantorenfrei ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{A}_M \models \varphi$ für alle nicht-leeren endlichen Teilmengen $M \subseteq B$ gilt.

(c) Verwenden Sie (a) und (b) sowie den Satz über die Skolem-Normalform aus der Vorlesung, um zu zeigen: Ist $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein erfüllbarer Satz, so besitzt $\psi$ ein abzählbares Modell.

(d) Hat auch jede erfüllbare Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ stets ein abzählbares Modell?

**Aufgabe 2** 10 Punkte

Im Folgenden betrachten wir lineare Ordnungen $(A,<)$. Geben Sie für die folgenden Eigenschaften jeweils eine Formel über der Signatur $\tau = \{<\}$ an, so dass eine lineare Ordnung $(A,<)$ die Formeln genau dann erfüllt, wenn die jeweilige Eigenschaft gilt. Achten Sie hierbei auf die freien Variablen. Sie können voraussetzen, dass $(A,<)$ eine lineare Ordnung ist.

(a) Die lineare Ordnung ist dicht.

(b) Die lineare Ordnung ist diskret.

(c) Die lineare Ordnung ist diskret und besitzt kein maximales Element.

(d) Die lineare Ordnung ist dicht und endlich.

(e) Die lineare Ordnung ist weder dicht noch diskret.

(f) Das Intervall $[x,y]$ enthält 15 Elemente.

(g) Jedes Element hat einen eindeutigen Nachfolger, $x$ ist ein Limespunkt (d.h. ein Punkt ohne eindeutigen Vorgänger) und nicht das maximale Element.

**Aufgabe 3** 10 Punkte

(a) Bringen Sie die folgenden beiden Formeln in Skolem-Normalform.

$$\forall x((\neg\forall y(x+y=y) \rightarrow \exists y\exists z(x+z+z=y+y)) \wedge \forall x\exists y(x \neq y)) \vee x+x=x$$

$$x=y \rightarrow (\exists x(x \neq y) \vee ((\forall y(y=y)) \rightarrow \exists y(x=y))) \wedge \forall x\neg\exists y\neg\forall z(x=z \vee z=y)$$

(b) Sei $\tau$ eine funktionale Signatur, und sei $\mathfrak{A}$ eine $\tau$-Struktur mit Universum $A$. Sei $\tau_R = \{R_f \mid f \in \tau\}$, wobei $R_f$ ein $n+1$-stelliges Relationssymbol ist, wenn $f$ eine $n$-stellige Funktion ist. Die *Relationalisierung* $R(\mathfrak{A})$ ist die $\tau_R$-Struktur, die man erhält, wenn man jede Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ durch ihren Graph ersetzt.

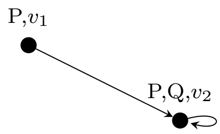
Sei $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine Formel. Zeigen Sie, dass eine Formel $\varphi' \in \mathrm{FO}(\tau_R)$ existiert, so dass für alle $\tau$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ genau dann, wenn } R(\mathfrak{A}) \models \varphi'.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie, dass zu jeder Formel eine äquivalente Formel existiert, die termreduziert ist.

**Aufgabe 4** 10 Punkte

Wir betrachten den folgenden Graphen $G$ mit Knotenbeschriftungen:




Konstruieren Sie das Auswertungsspiel für $\varphi = \forall x(Qx \rightarrow \exists y(Eyx)) \wedge \exists x(Px \wedge \neg Qx)$ auf $G$ und geben Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer oder die Verifiziererin an.