Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

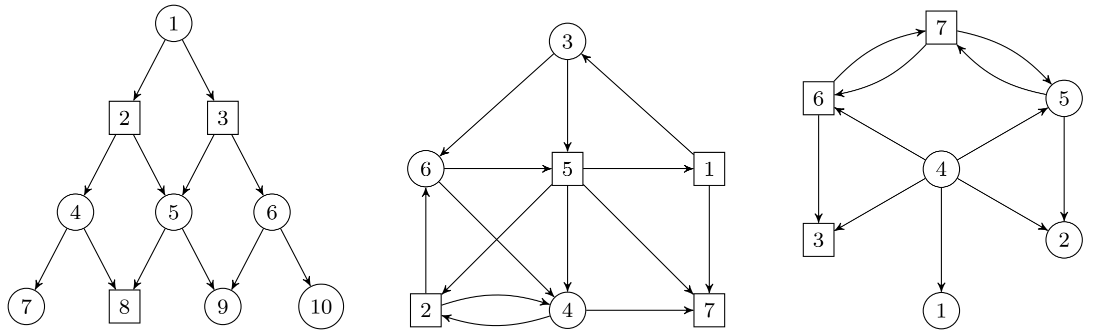
9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 19.6. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Wir betrachten folgende Spielgraphen (eingekreiste Knoten gehören Spieler 0, also rechteckige Knoten Spieler 1).



$\mathcal{G}_1$ $\mathcal{G}_2$ $\mathcal{G}_3$

(a) Berechnen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 von Spieler 0 und Spieler 1 in $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$.

(b) Sind die Spiele $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ fundiert? Sind sie determiniert?

(Erinnerung: Ein Spiel heißt *fundiert*, wenn jede mögliche Partie endlich ist.)

(c) Beweisen Sie, dass jedes fundierte Spiel determiniert ist.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

(a) Sei τ eine endliche Signatur, und sei $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Isomorphieklasse $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}\}$ von $\mathfrak{A}$ FO-axiomatisierbar ist.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die jeweils angegebene Relation in der jeweils angegebenen Struktur elementar definierbar ist, wobei $+$, $\cdot$ und $<$ wie üblich interpretiert seien.

(i) $[0, 15]$ in $(\mathbb{Z}, +)$;

(ii) $\{(x, y) \mid x < y\}$ in $(\mathbb{N}, +)$;

(iii) $\{0, 2\}$ in $(\mathbb{Z}, <)$;

(iv) $\{1, -1\}$ in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$;

(v) $\{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$;

(vi) $\{(x, y) \mid |x - y| = 9\}$ in $(\mathbb{Q}, <)$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \cdot)$ und $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen. Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ nennen wir *Primzahlpermutation*.

(a) Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Automorphismus der Struktur $\mathfrak{N}$. Zeigen Sie, dass $\pi \restriction \mathbb{P}$ eine Primzahlpermutation ist.

(b) Sei nun $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ eine Primzahlpermutation. Zeigen Sie, dass es genau einen Automorphismus $\pi_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von $\mathfrak{N}$ gibt, mit $\pi_f \restriction \mathbb{P} = f$.

(c) Aus Aufgabenteil (a) und (b) folgt, dass die Automorphismen von $\mathfrak{N}$ genau die durch Primzahlpermutationen induzierten Automorphismen sind. Folgern Sie mit Hilfe des Isomorphielemmas, dass dies auch eine Charakterisierung für die Automorphismen der Struktur $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, \cdot, |)$ liefert, wobei $|$ die Teilbarkeitsbeziehung in $\mathbb{N}$ sei.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in $\mathfrak{N}$ elementar definierbar sind:

(i) $R_1 = \{5, 7\}$;

(ii) $R_2 = \{p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n \mid p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j, n \geq 1\}$;

(iii) $R_3 = \{(m, n) : n = m + 1\}$.