Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 26.6. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei $\mathfrak{T} = (\{0,1\}^*, \preceq, E, P)$, wobei $\{0,1\}^*$ die Menge der endlichen Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$ bezeichnet, und

- $\preceq$ die *Präfix-Relation* auf $\{0,1\}^*$ ist, d.h. $v \preceq w$ genau dann, wenn $w = vz$ für ein $z \in \{0,1\}^*$, und
- E die *gleiche-Länge-Relation* auf $\{0,1\}^*$ ist, d.h. $(v,w) \in E$ genau dann, wenn $|v| = |w|$, also genau dann, wenn die Worte v und w die gleiche Länge haben, und
- P eine einstellige Relation ist (die im Folgenden auf unterschiedliche Weise festgelegt werden wird).

Zeigen oder widerlegen Sie für die jeweils angegebene Relation, dass sie in $\mathfrak{T}$ (unter Berücksichtigung der jeweiligen Definition von P) elementar definierbar ist.

Für die beiden folgenden Aufgabenteile gelte $P = \emptyset$.

(a) $R_a = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \geq 3\}$.

(b) $R_b = \{w \in \{0,1\}^* : 1 \preceq w\}$.

Ab sofort sei $P = \{w \in \{0,1\}^* : w = w_1 \cdots w_n \text{ und } w_n = 1\} = (0+1)^*1$.

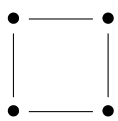
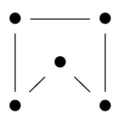
(c) $R_c = \{w \in \{0,1\}^* : 1 \preceq w\}$.

(d) $R_d = \{(u,v) \in E : u = u_1 \cdots u_n \text{ und } v = v_1 \cdots v_n \text{ mit } (u_i = 0 \text{ gdw. } v_i = 1) \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$.

(e) $R_e = \{w \in \{0,1\}^* : \text{der Buchstabe 1 kommt ungerade oft in } w \text{ vor}\}$.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Betrachten Sie folgende relationale Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.

(i) $\mathfrak{A} :=$  und $\mathfrak{B} :=$ 

(ii) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M, 1)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M, 1)$, wobei M der Graph der Multiplikation ist;

(iii) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, \{2^n : n \in \mathbb{N}\}, \{3^n : n \in \mathbb{N}\})$;

(b) Zeigen Sie, dass die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen über einer relationalen Signatur τ, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht axiomatisierbar ist.

(c) Sei nun τ eine beliebige endliche Signatur. Die Relationalisierung einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ liefert eine relationale Struktur $R(\mathfrak{A})$ über der relationalen Signatur τ_R (siehe Übung 8, Aufgabe 3). Zeigen oder widerlegen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt:

- Wenn $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, dann auch $R(\mathfrak{A}) \equiv_m R(\mathfrak{B})$.
- Wenn $R(\mathfrak{A}) \equiv_m R(\mathfrak{B})$, dann auch $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $\mathfrak{T}_n = (B_n, E_n)$ ein vollständiger Binärbaum der Höhe n, wobei $B_n = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \leq n\}$ und $E_n = \{(w, wx) \in B_n \times B_n : x \in \{0,1\}\}$.

(a) Geben Sie für alle $n \geq 0$ einen Satz $\varphi_n \in \mathrm{FO}(\{E\})$ an mit $\mathrm{qr}(\varphi_n) = \mathcal{O}(n)$, so dass für $\{E\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi_n$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{T}_n$.

Hinweis: Konstruieren Sie rekursiv Formeln $\psi_n(x)$ (unter Verwendung bereits konstruierter Formeln $\psi_{n-1}(x)$), so dass für alle $\{E\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $a \in A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \psi_n(a)$ gilt, wenn der von a erreichbare Teilgraph in $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathfrak{T}_n$ ist.

(b) Wählen Sie die Sätze φ_n nun zusätzlich so, dass auch gilt $|\varphi_n| = \mathcal{O}(n)$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\exists x \exists y(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \equiv \exists x \exists y \forall z((z = x \vee z = y) \rightarrow \varphi(z))$, wobei z eine Variable ist, die nicht in φ vorkommt.