Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 3.7. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der Satz (3.21) von Ehrenfreucht-Fraïsse nur für endliche Signaturen gilt. Genauer wollen wir zeigen: Es gibt eine abzählbare relationale Signatur τ und zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so dass der Herausforderer das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, obwohl $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.

Sei dazu $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der co-endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, also $B = \{\mathbb{N} \setminus M : M \in A\}$.

Wir setzen $\tau := \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ für unäre Prädikate P_i und wir definieren

- $\mathfrak{A} := (A, P_0, P_1, P_2, \dots)$, wobei für $i \in \mathbb{N}$ gelte, dass $M \in P_i$ gdw. $i \in M$, und
- $\mathfrak{B} := (B, P_0, P_1, P_2, \dots)$, wobei analog für $i \in \mathbb{N}$ gelte, dass $M \in P_i$ gdw. $i \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass der Herausforderer das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle endlichen Signaturen $\sigma \subseteq \tau$ gilt: $\mathfrak{A} \restriction \sigma \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass zwischen zwei abzählbaren unendlichen Mengen stets eine bijektive Abbildung existiert.

(c) Verwenden Sie (b), um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)) \to (\exists x \vartheta \vee \varphi)$

(ii) $(\neg\exists x \varphi(x) \to \forall x \neg\varphi(x)) \wedge (\neg\forall x \varphi(x) \vee \neg\exists x \neg\varphi(x))$.

Hinweis: Die Gültigkeit von Formeln entspricht der Gültigkeit gewisser Sequenzen.

(b) Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier x rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren." und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann. (*Hinweis*: Sie können annehmen, dass das Universum ein Dorf ist.)

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Beweisen Sie die Korrektheit der Quantorenregeln ($\forall \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \forall$). Zeigen Sie, dass in der Regel ($\Rightarrow \forall$) die Bedingung, dass c nicht in Γ, ψ und Δ vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln.

(i)

$$\frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \neg\psi \wedge \neg\vartheta, \psi \wedge \vartheta}$$

(ii)

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta,\ \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x))}{\Gamma,\ \psi(c) \;\Rightarrow\; \Delta,\ \varphi(c)}$$