Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 10.7. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben, die mit einem * versehen sind, geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1* 10* Punkte

Im Folgenden betrachten wir eine feste τ-Struktur $\mathfrak{A}$. Für zwei Kongruenzrelationen $\sim_1$ und $\sim_2$ definieren wir die Relation $\leq$ wie folgt:

$$\sim_1 \leq \sim_2, \text{ wenn für alle } a \in A \text{ gilt } [a]_{\sim_1} \subseteq [a]_{\sim_2}.$$

In diesem Fall sagen wir, dass $\sim_1$ *feiner* als $\sim_2$ ist, bzw. dass $\sim_2$ *gröber* ist.
Zeigen oder widerlegen Sie, dass zu jeder Struktur eine gröbste und eine feinste Kongruenzrelation existiert.
Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller Kongruenzen und bilden Sie den transitiven Abschluss.

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei $\tau = \{0, 1, f, R\}$, wobei $0, 1$ zwei Konstanten sind, f ein 2-stelliges Funktionssymbol, und R ein 1-stelliges Relationssymbol. Wir betrachten die folgende Menge T von atomaren Sätzen:

$$T := \{R0\} \cup \{Rft0 \mid t\ \tau\text{-Term}\} \cup \{fft_1t_2t_3 = ft_1ft_2t_3 \mid t_1, t_2, t_3\ \tau\text{-Terme}\}.$$

Sei Σ die kleinste Menge, die T enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$.

(c) Ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ein Modell von T?

(d) Sei $T' := T \cup \{\forall x(Rx)\}$. (Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution.) Zeigen Sie: T' ist erfüllbar, aber $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$.

Aufgabe 3 5+15* Punkte

Geben Sie ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an, oder beweisen Sie, dass dies unmöglich ist.

(a) $\{(A, \sim) \mid \sim$ ist eine Äquivalenzrelation$\}$

(b) $\{(A, \sim, g, R) \mid \sim$ ist eine Kongruenzrelation$\}$,
wobei g 2-stelliges Funktionssymbol ist, und R ein 2-stelliges Relationssymbol.

(c) $\{(A, \sim) \mid \sim$ ist Äquivalenzrelation, und es existiert eine überabzählbare $\sim$-Klasse$\}$

(d)* $\{(A, \sim) \mid \sim$ ist Äquivalenzrelation, jede Äquivalenzklasse ist unendlich$\}$

(e)* $\{(A, \sim) \mid \sim$ ist Äquivalenzrelation, es existiert genau eine unendliche $\sim$-Klasse$\}$

(f)* $\{(A, \sim) \mid \sim$ ist Äquivalenzrelation, jede $\sim$-Klasse ist endlich$\}$