Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Lessenich

SS 2013

13. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 17.7. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben, die mit einem * versehen sind, geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 15 Punkte

Geben Sie ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an, oder beweisen Sie, dass dies unmöglich ist.
Dazu sei f ein 1-stelliges Funktionssymbol, $+$ ein 2-stelliges Funktionssymbol, R ein 1-stelliges Relationssymbol, $<$ ein 2-stelliges Relationssymbol.

(a) $\{(A, f) \mid$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $a \in A$ mit $f^n a = a$ und $f^{n'} a \neq a$ für alle $0 < n' < n\}$

(b) $\{(A, f) \mid$ es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass für alle $a \in A$: $f^{n_a} a = a$ für ein $0 < n_a \leq n\}$

(c) $\{(A, R) \mid |R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R})|\}$

(d) $\{(A, <) \mid A$ ist abzählbar$\}$

(e) $\{(A, +) \mid (A, +) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ für ein $n \in \mathbb{N}^{>0}\}$

Aufgabe 2* 15* Punkte

(a) Wir betrachten die AL-Formel $\varphi = (X \to Y) \wedge (\neg X \wedge (\neg Y \vee Z))$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{h_\varphi, 1\}$ funktional vollständig ist.

(b) Sind die folgenden Formeln zu Horn-Formeln äquivalent? Zeigen oder widerlegen Sie dies.
   (i) $\big((X \wedge Y) \vee (\neg X \vee (\neg Y \wedge \neg Z))\big) \wedge \neg U \wedge Y$
   (ii) $(\neg X \wedge \neg Y) \to (Z \wedge (Q \to U \wedge \neg Z) \wedge ((Z \to Q) \vee (Z \leftrightarrow Q)))$

(c) Überprüfen Sie die folgenden Folgerungen, indem Sie bei einer die Resolutionsmethode, und bei einer den Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln verwenden.
   (i) $\{X \to Y, Y \wedge Z, Z \wedge Y \wedge X \to U, \neg U \vee V\} \models (Z \to U) \to X$
   (ii) $\{X \vee \neg X\} \models (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg U) \vee (X \wedge U \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee Z$

Aufgabe 3* 5* Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden beiden Schlussregeln für den Sequenzenkalkül für die Aussagenlogik. Argumentieren Sie dabei semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretationen.

(a) $\dfrac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \vartheta \qquad \Gamma', \varphi, \neg X \;\Rightarrow\; \vartheta, \psi}{\Gamma \cup \Gamma', \varphi \leftrightarrow \neg\psi \;\Rightarrow\; X, \vartheta}$

(b) $\dfrac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma, \varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \leftrightarrow (0 \to \vartheta)}$

Aufgabe 4* 15* Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in der jeweils angegebenen Struktur elementar definierbar sind.

(a) $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ in $(\mathbb{Q}, +)$

(b) $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ in $(\mathbb{Q}, <)$

(c) $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ in $(\mathbb{Q}, +, <)$

(d) $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R}, <)$

(e) $\{v \in V \mid \text{ Sp. 0 gewinnt in} \leq 3 \text{ Zügen von } v \text{ aus}\}$ in einem Spielgraphen (V, V_0, V_1, E)

(f) $\{(u, v, w) \mid w = \mathrm{ggT}(u, v)\}$ in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$