Aufgabe 3

(a) Bringen Sie die folgenden beiden Formeln in Skolem-Normalform.

$$\forall x((\neg\forall y(x+y=y)\rightarrow\exists y\exists z(x+z+z=y+y))\wedge\forall x\exists y(x\neq y))\vee x+x=x$$

$$x=y\rightarrow(\exists x(x\neq y)\vee((\forall y(y=y))\rightarrow\exists y(x=y)))\wedge\forall x\neg\exists y\neg\forall z(x=z\vee z=y)$$

(b) Sei τ eine funktionale Signatur, und sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur mit Universum A. Sei $\tau_R=\{R_f\mid f\in\tau\}$, wobei R_f ein $n+1$-stelliges Relationssymbol ist, wenn f eine n-stellige Funktion ist. Die *Relationalisierung* $R(\mathfrak{A})$ ist die τ_R-Struktur, die man erhält, wenn man jede Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ durch ihren Graph ersetzt.

Sei $\varphi\in\mathrm{FO}(\tau)$ eine Formel. Zeigen Sie, dass eine Formel $\varphi'\in\mathrm{FO}(\tau_R)$ existiert, so dass für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A}\models\varphi\text{ genau dann, wenn }R(\mathfrak{A})\models\varphi'.$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass zu jeder Formel eine äquivalente Formel existiert, die termreduziert ist.

Lösung:

(a)
$$\begin{aligned}
&\forall x((\neg\forall y(x+y=y)\rightarrow\exists y\exists z(x+z+z=y+y))\wedge\forall x\exists y(x\neq y))\vee x+x=x\\
\equiv&\forall x((\forall y(x+y=y)\vee\exists y\exists z(x+z+z=y+y))\wedge\forall x\exists y(x\neq y))\vee x+x=x\\
\equiv&\forall x'((\forall y(x'+y=y)\vee\exists y'\exists z(x'+z+z=y'+y'))\wedge\forall x''\exists y''(x''\neq y''))\vee x+x=x\\
\equiv&\forall x'\forall y\exists y'\exists z\forall x''\exists y''((x'+y=y\vee x'+z+z=y'+y')\wedge x''\neq y'')\vee x+x=x
\end{aligned}$$

Seien $f_{y'},f_z$ neue 2-stellige Funktionssymbole, und $f_{y''}$ ein neues 3-stelliges Funktionssymbol.

$$\forall x'\forall y\forall x''((x'+y=y\vee x'+f_zx'y+f_zx'y=f_{y'}x'y+f_{y'}x'y)\wedge x''\neq f_{y''}x'yx'')\vee x+x=x$$

$$\begin{aligned}
&x=y\rightarrow(\exists x(x\neq y)\vee((\forall y(y=y))\rightarrow\exists y(x=y)))\wedge\forall x\neg\exists y\neg\forall z(x=z\vee z=y)\\
\equiv&x\neq y\vee(\exists x(x\neq y)\vee\exists y(y\neq y)\vee\exists y(x=y))\wedge\forall x\forall y\forall z(x=z\vee z=y)\\
\equiv&x\neq y\vee(\exists x'(x'\neq y)\vee\exists y'(y'\neq y')\vee\exists y''(x=y''))\wedge\forall x''\forall y'''\forall z(x''=z\vee z=y''')\\
\equiv&\exists x'\exists y'\exists y''\forall x''\forall y'''\forall z(x\neq y\vee x'\neq y\vee y'\neq y'\vee x=y'')\wedge(x''=z\vee z=y''')
\end{aligned}$$

Seien $c_{x'},c_{y'},c_{y''}$ 3 neue Konstantensymbole.

$$\forall x''\forall y'''\forall z(x\neq y\vee c_{x'}\neq y\vee c_{y'}\neq c_{y'}\vee x=c_{y''})\wedge(x''=z\vee z=y''')$$