Mathematatische Logik
SS 2011

Prof. Dr. Erich Grädel

Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

3 Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

3.1 Definierbarkeit

AXIOMATISIERBARE STRUKTURKLASSEN. Wir haben bereits in Kapitel 2 den Begriff der durch eine Satzmenge Φ axiomatisierten Strukturklasse $\mathrm{Mod}(\Phi)$ eingeführt und Axiomensysteme für einige wichtige Klassen angegeben, etwa für Graphen, Gruppen, lineare Ordnungen sowie für die Klasse aller unendlichen Strukturen.

Definition 3.1. Sei (τ) die Klasse aller τ-Strukturen. Eine Strukturklasse $\mathcal{K} \subseteq (\tau)$ ist *FO-axiomatisierbar* (oder einfach: axiomatisierbar), wenn eine Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ existiert, so dass $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$. Wenn das Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ endlich ist, dann können wir die Konjunktion $\psi = \bigwedge\{\varphi : \varphi \in \Phi\}$ bilden und damit $\mathcal{K}$ durch einen einzigen Satz axiomatisieren. Wir sagen in diesem Fall, $\mathcal{K}$ ist *elementar* oder *endlich axiomatisierbar*.

Wir beginnen in diesem Kapitel mit der Untersuchung der Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik. Ein wichtiger Aspekt ist dabei die Frage, welche Strukturklassen FO-axiomatisierbar und welche sogar endlich axiomatisierbar sind.

Wir wissen bereits, dass Graphen, Gruppen und lineare Ordnungen endlich axiomatisierbar sind. Weiter ist offensichtlich, dass dasselbe auch für Äquivalenzstrukturen, partielle Ordnungen, dichte lineare Ordnungen, diskrete lineare Ordnungen, Ringe und Körper gilt. Die Klasse aller unendlichen Strukturen ist zwar FO-axiomatisierbar, aber das Axiomensystem Φ_∞, das wir in Kapitel 2.4 dafür angegeben haben, besteht aus unendlich vielen Formeln. (Wir werden später sehen, dass kein endliches Axiomensystem für diese Klasse existiert.)

Hier sind noch einige weitere Beispiele für axiomatisierbare Strukturklassen.

Beispiel 3.2.

- Die Klasse aller Körper ist axiomatisiert durch $\psi_{\text{Körper}} \in \text{FO}(\tau_{\text{ar}})$, die Konjunktion aller Körperaxiome. Für jede Primzahl p ist auch die Klasse der Körper mit Charakteristik p endlich axiomatisierbar durch $\psi_{\text{Körper}} \wedge \chi_p$, wobei χ_p der Satz $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p\text{-mal}} = 0$ ist. Für Körper der Charakteristik 0 können wir zumindest ein unendliches Axiomensystem angeben, nämlich

$$\Phi = \{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\neg\chi_p : p \text{ Primzahl}\}.$$

- Auch die Klasse ACF der algebraisch abgeschlossenen Körper ist FO-axiomatisierbar. Der Satz

$$\psi_n := \forall u_0 \cdots \forall u_n (u_n \neq 0 \rightarrow \exists x (u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n = 0))$$

besagt, dass jedes Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten aus dem Körper auch eine Nullstelle im Körper hat. (Hier ist x^n als abkürzende Schreibweise für den Term $\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ mal}}$ aufzufassen.) Also ist $\Phi_{\text{ACF}} = \{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\psi_n : n \geq 1\}$ ein Axiomensystem für algebraisch abgeschlossene Körper.

Übung 3.1. Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche Struktur mit endlicher Signatur. Zeigen Sie, dass $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ endlich axiomatisierbar ist.

Der Nachweis, dass eine Strukturklasse (endlich) axiomatisierbar ist, wird in der Regel durch explizite Angabe eines Axiomensystems geführt. Um nachzuweisen, dass eine Strukturklasse gar kein oder zumindest kein endliches Axiomensystem zulässt, sind andere Methoden erforderlich, welche in diesem und dem folgenden Kapitel entwickelt werden sollen.

Zunächst aber diskutieren wir noch einen anderen Aspekt der Ausdrucksstärke einer Logik.

Definierbarkeit in einer Struktur. Neben der Frage, welche Strukturklassen durch Sätze oder Satzmengen der Prädikatenlogik axiomatisierbar sind, können wir die Ausdrucksstärke von FO auch innerhalb einer festen Struktur untersuchen.

Sei $\psi(x_1,\dots,x_r) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann definiert ψ in $\mathfrak{A}$ die r-stellige Relation

$$\psi^{\mathfrak{A}} := \{(a_1,\dots,a_r) : \mathfrak{A} \models \psi(a_1,\dots,a_r)\} \subseteq A^r.$$

Definition 3.3. Eine Relation $R \subseteq A^r$ auf dem Universum einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist *(elementar) definierbar* in $\mathfrak{A}$, wenn $R = \psi^{\mathfrak{A}}$ für eine Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$. Eine Funktion $f : A^r \to A$ heißt elementar definierbar, wenn ihr Graph R_f elementar definierbar ist.

Insbesondere ist also eine Konstante a elementar definierbar, wenn eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\tau)$ existiert, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ und $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(b)$ für alle $b \neq a$. Wir sagen, a ist *termdefinierbar* in $\mathfrak{A}$, wenn ein Grundterm $t \in T(\tau)$ existiert, so dass $t^{\mathfrak{A}} = a$. Jede termdefinierbare Konstante ist insbesondere elementar definierbar durch eine Formel der Form $x = t$.

Beispiel 3.4.

- Die Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{R}$ ist elementar definierbar in $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$, denn für die Formel $\varphi(x,y) := \exists z(z \neq 0 \land x + z \cdot z = y)$ gilt:

  $$a < b \quad \text{gdw.} \quad (\mathbb{R},+,\cdot,0,1) \models \varphi(a,b).$$

- In $(\mathbb{Z},<)$ ist die Nachfolgerfunktion $z \mapsto z+1$ elementar definierbar durch die Formel $\varphi(x,y) := x < y \land \forall z(x < z \land y \neq z \to y < z)$.
- In $(\mathbb{N},+,0,1)$ ist jedes n termdefinierbar durch den Term $\underline{n} = \underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ mal}}$ (für $n \geq 1$).
- Im Körper $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$ der rationalen Zahlen sind die termdefinierbaren Konstanten genau die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. Alle anderen Elemente sind elementar definierbar durch Formeln der Form $\underline{p} \cdot x = \underline{q}$ oder $\underline{p} \cdot x + \underline{q} = 0$, nicht aber termdefinierbar.

- Im Körper der reellen Zahlen können schon aus Mächtigkeitsgründen nicht alle Elemente elementar definierbar sein: Es gibt überabzählbar viele reelle Zahlen aber nur abzählbar viele Formeln $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\tau_{\mathrm{ar}})$.

Als nächstes beobachten wir, dass das Hinzunehmen definierbarer Relationen zu einer Struktur keinen Gewinn an Ausdrucksstärke bringt.

Lemma 3.5. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur und $\mathfrak{B}$ eine Expansion von $\mathfrak{A}$ durch beliebig viele, in $\mathfrak{A}$ elementar definierbare Relationen und Funktionen. Dann ist jede in $\mathfrak{B}$ elementar definierbare Relation oder Funktion bereits in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar.

Beweis. Sei τ die Signatur von $\mathfrak{B}$. In jeder Formel $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ kommen nur endlich viele Relations- und Funktionssymbole $R_1, \dots, R_s$ bzw. $f_1, \dots, f_t$ aus $\tau \setminus \sigma$ vor. Zu jedem dieser R_i bzw. f_j gibt es eine σ-Formel $\vartheta_i(\bar{y})$ bzw. $\chi_j(\bar{y}, z)$, welche in $\mathfrak{A}$ die entsprechende Relation bzw. Funktion von $\mathfrak{B}$ definiert.

Weiter können wir nach Lemma 2.19 annehmen, dass ψ termreduziert ist, d.h. dass Funktionssymbole aus $\tau \setminus \sigma$ nur in Atomen der Form $f_j\bar{y} = z$ auftreten. Indem wir in $\psi(\bar{x})$ die Relations- und Funktionssymbole aus $\tau \setminus \sigma$ durch die definierenden Formeln ersetzen (d.h. jedes Atom $R_i\bar{u}$ durch $\vartheta_i(\bar{u})$ und jedes Atom $f_j\bar{u} = v$ durch $\chi_j(\bar{u}, v)$), erhalten wir eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{FO}(\sigma)$, so dass $\mathfrak{B} \models \forall \bar{x}(\psi \leftrightarrow \varphi)$. Da φ eine σ-Formel ist, folgt insbesondere $\psi^{\mathfrak{B}} = \varphi^{\mathfrak{A}}$. Q.E.D.

Relativierte Quantoren. An zwei Beispielen illustrieren wir die Verwendung relativierter Quantoren.

Stetigkeit. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf den reellen Zahlen. Ist die Menge $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ stetig im Punkt } a\}$ in der Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, f)$ elementar definierbar?

Wir betrachten dazu die Stetigkeitsdefinition aus der Analysis: Sei $U_\varepsilon(x)$ die ε-Umgebung von x. Die Funktion f ist stetig in x, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in U_\delta(x)$ gilt: $f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$.

Die Existenz- und Allaussagen für δ, ε und y sind hier *relativiert*: es werden nur Elemente betrachtet, die gewisse Eigenschaften erfüllen. Man beachte, dass relativierte Aussagen der Form „es gibt ein x mit α, so dass ...“ bzw. „für alle x mit α gilt ...“ durch $\exists x(\alpha \wedge \cdots)$ bzw. $\forall x(\alpha \to \cdots)$ formalisiert werden können. Wir benutzen gelegentlich die Schreibweise $(\exists x \,.\, \alpha)\psi$ als Umschreibung für $\exists x(\alpha \wedge \psi)$ und $(\forall x \,.\, \alpha)\psi$ für $\forall x(\alpha \to \psi)$.

Um Stetigkeit zu formalisieren, gehen wir nun wie folgt vor. (Wir verwenden die Relation $\leq$, was aufgrund ihrer elementaren Definierbarkeit unproblematisch ist.) Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Relation $\{(a, b, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \geq 0 \text{ und } b \in U_\varepsilon(a)\}$ durch die Formel

$$\varphi(x, y, z) := 0 \leq z \wedge (\exists u \,.\, 0 \leq u \leq z)(x + u = y \vee y + u = x)$$

definiert wird. Die Stetigkeit von f im Punkt x wird nun ausgedrückt durch die Formel

$$\psi(x) := (\forall u \,.\, 0 < u)(\exists z \,.\, 0 < z)\forall y(\varphi(x, y, z) \to \varphi(fx, fy, u)).$$

3.2 Das Isomorphielemma

Definition 3.6. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien τ-Strukturen. Ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : A \to B$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für jedes (n-stellige) Relationssymbol $R \in \tau$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \quad \text{gdw.} \quad (\pi a_1, \ldots, \pi a_n) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

(2) Für jedes (n-stellige) Funktionssymbol $f \in \tau$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi a_1, \ldots, \pi a_n).$$

Bemerkung 3.7. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich π auf natürliche Weise zu einer Abbildung $\pi : A^n \to B^n$ erweitern mit $\pi(a_1, \ldots, a_n) := (\pi a_1, \ldots, \pi a_n)$.

Bedingung (1) können wir dann auch so formulieren: Für alle Relationssymbole $R \in \tau$ ist $\pi(R^{\mathfrak{A}}) = R^{\mathfrak{B}}$. Bedingung (2) bedeutet, dass für alle Funktionssymbole $f \in \tau$ gilt: $\pi \circ f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \circ \pi$.

Für nullstellige Funktionssymbole c besagt Bedingung (2), dass $\pi c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Definition 3.8. Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind *isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), wenn ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ existiert. Ein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$ heißt *Automorphismus* von $\mathfrak{A}$.

Notation. Wir schreiben $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus ist. Die Identitätsabbildung auf $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $1_{\mathfrak{A}}$.

Die Menge aller Automorphismen einer Struktur $\mathfrak{A}$ bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe mit neutralem Element $1_{\mathfrak{A}}$. Wir nennen sie die *Automorphismengruppe* oder *Symmetriegruppe* von $\mathfrak{A}$ und bezeichnen sie mit $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist *starr*, wenn $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = \{1_{\mathfrak{A}}\}$, d.h. wenn der triviale Automorphismus $1_{\mathfrak{A}}$ der einzige Automorphismus der Struktur ist.

Isomorphe Strukturen betrachten wir als gleich. Insbesondere können FO-Formeln nicht zwischen isomorphen Strukturen unterscheiden.

Lemma 3.9 (Isomorphielemma)**.** Sei $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus von τ-Strukturen. Dann gilt für alle $\psi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi(\pi a_1, \dots, \pi a_n)\,.$$

Beweis. Per Induktion über den Termaufbau zeigt man sofort, dass für jeden Term $t(\bar{x}) \in \mathrm{T}(\tau)$ mit Variablen aus $x_1, \dots, x_n$ und für alle $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ gilt:

$$\pi[\![t(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}} = [\![t(\pi\bar{a})]\!]^{\mathfrak{B}}. \tag{*}$$

Wir führen nun den Beweis per Induktion über den Formelaufbau; nach Lemma 2.16 können wir dabei annehmen, dass ψ reduziert ist.

(1) Für Formeln der Form $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a}) \ &\text{gdw. } [\![t_1(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}} = [\![t_2(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}} \\
&\text{gdw. } \pi[\![t_1(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}} = \pi[\![t_2(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}} \\
&\qquad \text{(da } \pi \text{ injektiv ist)} \\
&\text{gdw. } [\![t_1(\pi\bar{a})]\!]^{\mathfrak{B}} = [\![t_2(\pi\bar{a})]\!]^{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \text{(nach (*))} \\
&\text{gdw. } \mathfrak{B} \models t_1(\pi\bar{a}) = t_2(\pi\bar{a})
\end{aligned}$$

(2) Für Atome $Pt_1 \dots t_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models Pt_1(\bar{a}) \cdots t_n(\bar{a}) \ &\text{gdw. } ([\![t_1(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}}, \dots, [\![t_n(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}} \\
&\text{gdw. } (\pi[\![t_1(\bar{a})^{\mathfrak{A}}]\!], \dots, \pi[\![t_n(\bar{a})]\!]^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \text{(da } \pi \text{ ein Isomorphismus ist)} \\
&\text{gdw. } ([\![t_1(\pi\bar{a})]\!]^{\mathfrak{B}}, \dots, [\![t_n(\pi\bar{a})]\!]^{\mathfrak{B}}) \in P^{\mathfrak{B}} \\
&\qquad \text{(nach (*))} \\
&\text{gdw. } \mathfrak{B} \models Pt_1(\pi\bar{a}) \cdots t_n(\pi\bar{a})
\end{aligned}$$

(3) Für Formeln der Form $\neg\psi$ oder $\psi \vee \varphi$ ist der Induktionsschluss trivial.

(4) Für Formeln $\exists y \psi(\bar{x}, y)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \exists y \psi(\bar{a}, y) \ &\text{gdw. } \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, c) \ \text{ für ein } c \in A \\
&\text{gdw. } \mathfrak{B} \models \psi(\pi\bar{a}, \pi c) \ \text{ für ein } c \in A \\
&\qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&\text{gdw. } \mathfrak{B} \models \psi(\pi\bar{a}, b) \ \text{ für ein } b \in B \\
&\qquad \text{(da } \pi \text{ bijektiv ist)} \\
&\text{gdw. } \mathfrak{B} \models \exists y \psi(\pi\bar{a}, y).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Insbesondere lassen sich isomorphe τ-Strukturen durch Sätze der Prädikatenlogik nicht unterscheiden. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe τ-Strukturen, so gilt für alle τ-Sätze ψ:

$\mathfrak{A} \models \psi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \psi$.

Daraus folgt, dass axiomatisierbare Modellklassen unter Isomorphie abgeschlossen sind. Dies bedeutet, dass für jede Klasse $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\psi)$ und jedes Paar von isomorphen Strukturen $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt:

$\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ gdw. $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

In manchen Fällen liefert das Isomorphielemma ein einfaches Kriterium, um nachzuweisen, dass eine Relation in einer Struktur *nicht* elementar definierbar ist.

Lemma 3.10. Sei π ein Automorphismus einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$, und sei $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$. Dann ist π auch ein Automorphismus der expandierten Struktur $(\mathfrak{A}, \psi^{\mathfrak{A}})$.

Beweis. Da π ein Automorphismus ist, gilt für alle Tupel $\bar{a}$ aus A:

$\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ gdw. $\mathfrak{A} \models \psi(\pi\bar{a})$.

Also ist $\pi(\psi^{\mathfrak{A}}) = \psi^{\mathfrak{A}}$. Q.E.D.

Beispiel 3.11. Wir haben gesehen, dass $<$ definierbar ist in $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$. Aus dem soeben bewiesenen Lemma folgt dagegen, dass $<$ in $(\mathbb{R}, +, 0)$ *nicht* elementar definierbar ist. Die Abbildung $\pi : x \mapsto -x$ ist nämlich ein Automorphismus von $(\mathbb{R}, +, 0)$, nicht aber von $(\mathbb{R}, +, 0, <)$, denn aus $a < b$ folgt eben gerade *nicht* $-a < -b$.

Übung 3.2. Sei $\tau = \emptyset$ und A unendlich. Beschreiben Sie alle in A elementar definierbaren Relationen $R \subseteq A^n$.

Übung 3.3. Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ die Addition nicht elementar definierbar ist.

3.3 Theorien und elementar äquivalente Strukturen

Definition 3.12. Eine *Theorie* ist eine erfüllbare Menge $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ von Sätzen, die unter $\models$ abgeschlossen ist, d.h. es gilt für alle τ-Sätze ψ mit $T \models \psi$, dass $\psi \in T$ gilt.

Eine Theorie T ist *vollständig*, wenn für jeden Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ entweder $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$ gilt.

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Die *Theorie von* $\mathfrak{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\psi : \mathfrak{A} \models \psi\}$. Offensichtlich ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ vollständig. Die Theorie einer τ-Modellklasse $\mathcal{K}$ ist

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathfrak{A}).$$

Wenn Φ ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ ist, dann ist $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \{\psi : \Phi \models \psi\}$.

Natürlich ist nicht jede Theorie vollständig. Zum Beispiel enthält die Theorie der Gruppen weder den Satz $\forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$ noch seine Negation, da es sowohl kommutative wie nicht-kommutative Gruppen gibt. Jede Theorie T lässt sich aber zu einer vollständigen Theorie erweitern; für jedes Modell $\mathfrak{A} \models T$ ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ eine vollständige Erweiterung von T.

Definition 3.13. Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind *elementar äquivalent* (kurz: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, d.h. wenn für alle τ-Sätze ψ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi.$$

Lemma 3.14. Eine Theorie ist genau dann vollständig, wenn alle ihre Modelle elementar äquivalent sind.

Beweis. Sei T eine vollständige Theorie. Für jedes Modell $\mathfrak{A} \models T$ gilt $T \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ und wegen der Vollständigkeit von T daher sogar $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Also haben alle Modelle von T dieselbe Theorie.

Wenn andererseits T nicht vollständig ist, dann gibt es einen Satz ψ, so dass sowohl $T \cup \{\psi\}$ und $T \cup \{\neg\psi\}$ erfüllbar sind. T besitzt daher zwei nicht elementar äquivalente Modelle. Q.E.D.

Aus dem Isomorphielemma folgt unmittelbar, dass isomorphe Strukturen auch elementar äquivalent sind. Wie wir später sehen werden, gilt die Umkehrung dieser Aussage nicht.

Definition 3.15. Der *Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel ψ ist definiert durch:

(1) $\mathrm{qr}(\psi) = 0$ für quantorenfreie ψ,
(2) $\mathrm{qr}(\neg\psi) = \mathrm{qr}(\psi)$,
(3) $\mathrm{qr}(\psi \circ \varphi) = \max(\mathrm{qr}(\psi), \mathrm{qr}(\varphi))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und
(4) $\mathrm{qr}(\exists x\psi) = \mathrm{qr}(\forall x\psi) = \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Der Quantorenrang ist also die maximale Schachtelungstiefe von Quantoren in der gegebenen Formel.

Beispiel 3.16. Der Quantorenrang von $\forall x(\exists y Pxy \rightarrow \forall z Pxz)$ ist 2. Eine äquivalente Formel in PNF ist $\forall x \forall y \forall z(Pxy \rightarrow Pxz)$. Man beachte, dass die Transformation in PNF in der Regel den Quantorenrang erhöht.

Definition 3.17. Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind *m-äquivalent* ($\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), wenn für alle τ-Sätze ψ mit $\mathrm{qr}(\psi) \leq m$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \psi.$$

Wir erweitern die Begriffe der elementaren Äquivalenz und der m-Äquivalenz auf Strukturen mit Parametern, d.h. Strukturen, in denen zusätzlich gewisse Elemente ausgezeichnet sind. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen, und $\bar{a} = a_1, \dots, a_r$, $\bar{b} = b_1, \dots, b_r$Tupel von Elementen aus A bzw. B. Dann ist $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$, wenn für alle τ-Formeln $\psi(x_1, \dots, x_r)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ gdw. $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b})$. Analog definiert man $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathfrak{B}, \bar{b})$.

3.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

— That isn't the way to play it.
— Why not?
— 'Cause it isn't the way to win.
— Is there a way to win?
— Well, there's a way to lose more slowly.
Robert Mitchum, Jane Greer, in: Out of the Past

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine spieltheoretische Deutung der elementaren Äquivalenz und der m-Äquivalenz. Der Einfachheit halber betrachten wir für den Rest dieses Kapitels nur relationale Strukturen.

Definition 3.18. Sei τ eine relationale Signatur und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Ein *lokaler (oder partieller) Isomorphismus* von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine injektive

Abbildung $p : \mathrm{dom}(p) \to B$ wobei $\mathrm{dom}(p) \subseteq A$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, alle n-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{dom}(p)$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (pa_1, \ldots, pa_n) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

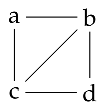
Die Menge aller lokalen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Das Bild von p ist $\mathrm{bild}(p) := \{pa : a \in \mathrm{dom}(p)\}$. Die *leere Abbildung* p mit $\mathrm{dom}(p) = \mathrm{bild}(p) = \emptyset$ ist trivialerweise ein lokaler Isomorphismus. Ein nicht-leerer lokaler Isomorphismus ist ein Isomorphismus zwischen den von $\mathrm{dom}(p)$ und $\mathrm{bild}(p)$ induzierten Substrukturen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wir identifizieren einen lokalen Isomorphismus p oft mit seinem Graphen, d.h. mit der Menge $\{(a, pa) : a \in \mathrm{dom}(p)\}$. Insbesondere nennen wir p endlich, wenn sein Graph endlich ist.

Beispiel 3.19.

- Betrachte die beiden folgenden Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

  $\mathfrak{A}$: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $\qquad$ $\mathfrak{B}$:

  Dann ist $p = \{(2, a), (3, b), (4, d)\}$ ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.
- Seien $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ lineare Ordnungen und $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene Elemente von A. Eine Abbildung $p : a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_n \mapsto b_n$ ist ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ genau dann wenn eine Permutation $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ existiert sodass $a_{s(1)} <^{\mathfrak{A}} a_{s(2)} <^{\mathfrak{A}} \cdots <^{\mathfrak{A}} a_{s(n)}$ und $b_{s(1)} <^{\mathfrak{B}} b_{s(2)} <^{\mathfrak{B}} \cdots <^{\mathfrak{B}} b_{s(n)}$.

Das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wird von zwei Spielern nach folgenden Regeln gespielt.

Das *Spielfeld* besteht aus den Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wir setzten dabei voraus, dass $A \cap B = \emptyset$. Die Spieler sind der *Herausforderer* und die *Duplikatorin*, oft auch bezeichnet als Spieler I und II. Eine Partie besteht aus m Zügen.

Im *i-ten Zug* bestimmt der Herausforderer entweder ein Element $a_i \in A$ oder ein $b_i \in B$. Die Duplikatorin antwortet, indem sie ein Element aus der jeweils anderen Struktur auswählt.

Nach m Zügen sind also Elemente $a_1, \ldots, a_m$ aus $\mathfrak{A}$ und $b_1, \ldots, b_m$ aus $\mathfrak{B}$ ausgezeichnet. Die Duplikatorin hat die Partie gewonnen, wenn die Menge $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)\}$ ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist. Anderenfalls hat der Herausforderer gewonnen.

Nach i Zügen in $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist eine *Position* $(a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_i)$ erreicht. Das verbleibende Teilspiel, mit $m - i$ Zügen, bezeichnen wir mit $G_{m-i}(\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_i, \mathfrak{B}, b_1, \ldots, b_i)$.

Eine *Gewinnstrategie* des Herausforderers für ein solches (Teil-)Spiel ist eine Funktion, die ihm in jeder erreichbaren Position mögliche Züge nennt, mit denen er die Partie gewinnt, egal wie seine Gegnerin spielt. Analog sind Gewinnstrategien für die Duplikatorin definiert.

Wir sagen, *der Herausforderer (bzw. die Duplikatorin) gewinnt das Spiel* $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn er (bzw. sie) eine Gewinnstrategie dafür hat. Per Induktion über die Anzahl der Züge zeigt man leicht, dass für jedes (Teil-) Spiel genau einer der Spieler eine Gewinnstrategie hat (vgl. Übung 2.3).

Beispiel 3.20.

- Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$. Die Duplikatorin gewinnt $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, aber der Herausforderer gewinnt $G_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
- Für $\tau = \{E, P\}$ (wobei P einstelliges und E zweistelliges Relationssymbol) betrachte die beiden Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in Figure 3.1. Auch hier gewinnt der Herausforderer $G_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, die Duplikatorin aber $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Das Spiel $\mathbf{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Eine wichtige Variante ist das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ohne feste Beschränkung der Anzahl der Züge: In jeder Partie bestimmt der Herausforderer zunächst ein $m \in \mathbb{N}$, dann wird das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gespielt.

Der Herausforderer gewinnt also das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt so, dass er das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt. Anders

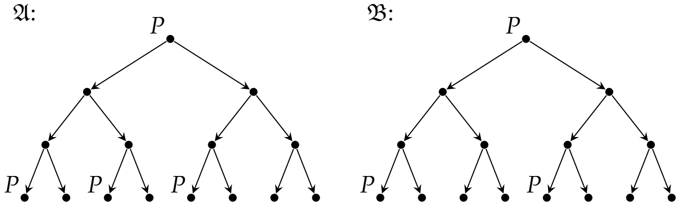


Abbildung 3.1. Zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \not\equiv_3 \mathfrak{B}$

ausgedrückt: die Duplikatorin gewinnt $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn sie für jedes der Spiele $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt.

Satz 3.21 (Ehrenfeucht, Fraïssé)**.** Sei τ endlich und relational, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen.

(1) Folgende Aussagen sind äquivalent:
  (i) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
  (ii) Die Duplikatorin gewinnt das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(2) Für alle $m \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
  (i) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.
  (ii) Die Duplikatorin gewinnt $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Wir führen hier nur den Beweis, dass eine Gewinnstrategie der Duplikatorin für das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (bzw. für $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$) die elementare Äquivalenz (bzw. m-Äquivalenz) von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ impliziert. Dazu beweisen wir die folgende etwas stärkere Aussage.

Satz 3.22. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen, $\bar{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$, $\bar{b} = b_1, \ldots, b_r \in B$. Wenn es eine Formel $\psi(\bar{x})$ mit $\mathrm{qr}(\psi) = m$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$, dann hat der Herausforderer eine Gewinnstrategie für $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.

Beweis. Sei $m = 0$. Quantorenfreie Formeln sind Boolesche Kombinationen von atomaren Formeln. Wenn $\mathfrak{A}, \bar{a}$ und $\mathfrak{B}, \bar{b}$ durch eine quantorenfreie Formel unterschieden werden, dann also bereits durch ein Atom. Daraus folgt, dass $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)\}$ kein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist, also gewinnt der Herausforderer $G_0(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.

Sei nun $\mathrm{qr}(\psi) = m > 0$, $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$. Die Formel $\psi(\bar{x})$ ist eine Boolesche Kombination von Formeln mit Quantorenrang $< m$ und von Formeln der Form $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = m - 1$. Es muss also mindestens eine Formel dieser Gestalt geben, welche $\mathfrak{A}, \bar{a}$ und $\mathfrak{B}, \bar{b}$ unterscheidet. Wenn diese Formel Quantorenrang $< m$ hat, dann hat nach Induktionsvoraussetzung der Herausforderer eine Gewinnstrategie für $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$ und also erst recht für $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$. Andernfalls gibt es eine Formel $\exists y \varphi(\bar{x}, y)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = m - 1$, so dass entweder

(1) $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$ und $\mathfrak{B} \models \forall y \neg\varphi(\bar{b}, y)$ oder
(2) $\mathfrak{A} \models \forall y \neg\varphi(\bar{a}, y)$ und $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{b}, y)$.

Im Fall (1) wählt der Herausforderer im ersten Zug ein $c \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, c)$. Für jedes beliebige $d \in B$, welches die Duplikatorin wählen kann, gilt $\mathfrak{B} \models \neg\varphi(\bar{b}, d)$. Nach Induktionsvoraussetzung gewinnt der Herausforderer das Restspiel $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, c, \mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. Im Fall (2) gewinnt der Herausforderer, indem er ein $d \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, d)$ wählt. Die Duplikatorin wählt ein beliebiges $c \in A$. Also ist nach diesem Zug eine Position $(\bar{a}, c, \bar{b}, d)$ erreicht mit $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\bar{a}, c)$ und $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}, d)$. Da $\mathrm{qr}(\neg\varphi) = \mathrm{qr}(\varphi) = m - 1$, gewinnt der Herausforderer nach Induktionsvoraussetzung das verbleibende Teilspiel $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \bar{a}, c, \mathfrak{B}, \bar{b}, d)$. Q.E.D.

Daraus erhalten wir (indem wir $r = 0$ setzen und somit Sätze betrachten) die Implikationen *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* des Satzes von Ehrenfeucht und Fraïssé:

(1) Wenn die Duplikatorin da Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, so gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$;
(2) Wenn die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, so gilt $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Beispiel 3.23. Die Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ lassen sich durch einen Satz ψ vom Quantorenrang 3 trennen, welcher ausdrückt, dass $<$ nicht dicht ist:

$$\psi := \exists x \exists y (x < y \wedge \forall z (\neg(x < z \wedge z < y))).$$

Nach dem Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé gewinnt der Herausforderer also $G_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Eine Gewinnstrategie des Herausforderers besteht darin, in den ersten beiden Zügen zwei aufeinanderfolgende Elemente a und $a+1$ von $\mathbb{Z}$ zu wählen. Die Duplikatorin muss mit zwei Elementen $r, s \in \mathbb{R}$ antworten, so dass $r < s$. Aber dann gewinnt der Herausforderer, indem er im dritten Zug ein Element $t \in \mathbb{R}$ mit $r < t < s$ wählt.

Anwendungen. Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé liefert eine wichtige Methode, um zu zeigen, dass eine Modellklasse $\mathcal{K}$ *nicht* elementar axiomatisierbar ist. Wenn es gelingt, Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ zu finden, so dass die Duplikatorin das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, dann folgt, dass kein FO-Satz $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheiden kann, und damit auch kein FO-Satz $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

Eine stärkere Variante der Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode besteht darin, Folgen $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von τ-Strukturen zu konstruieren, so dass für alle m, $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ und die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ gewinnt. Die Annahme, dass $\mathcal{K}$ elementar axiomatisierbar ist, also $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\psi)$ für ein $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$, führt nun sofort auf einen Widerspruch: Sei $m = \mathrm{qr}(\psi)$. Nach dem Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé ist $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$. Also $\mathfrak{A}_m \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_m \models \psi$. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$.

Beispiel 3.24. Sei $\tau = \emptyset$ und $\mathcal{K}_\infty$ die Klasse aller unendlichen τ-Strukturen, d.h. aller unendlichen Mengen. Wir haben gesehen, dass $\mathcal{K}$ durch eine unendliche Satzmenge Φ_∞ axiomatisiert wird. Mit der Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode können wir nun zeigen, dass $\mathcal{K}_\infty$ *nicht* endlich axiomatisierbar ist.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ setze $\mathfrak{A}_m = \mathbb{N}$ und $\mathfrak{B}_m = \{1, \ldots, m\}$. Offensichtlich gewinnt die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$, also trennt kein Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\emptyset)$ die endlichen von den unendlichen Mengen.

Transitive Hüllen sind nicht FO-definierbar. Eine fundamentale Einschränkung der Ausdrucksstärke von FO ist das Fehlen eines Rekursionsmechanismus. Eigenschaften, welche Rekursion (oder unbeschränkte Iteration) erfordern, sind im Allgemeinen nicht FO-definierbar. Wir illustrieren dies am Beispiel der transitiven Hülle.

Satz 3.25. Sei $\tau = \{E\}$ (die Signatur von Graphen). Es existiert *keine* Formel $\varphi(x,y) \in \mathrm{FO}(\tau)$, welche in jeder τ-Struktur $\mathfrak{A} = (A,E)$ die transitive Hülle von E definiert, d.h. für die gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi(a,b) \ &\text{gdw. es gibt in } \mathfrak{A} \text{ einen } E\text{-Pfad von } a \text{ nach } b \\ &\text{gdw. es gibt } n > 0 \text{ und } c_0,\dots,c_n \in A \text{ mit } c_0 = a, \\ &\qquad c_n = b \text{ und } (c_i, c_{i+1}) \in E \text{ für alle } i < n. \end{aligned}$$

Satz 3.25 folgt unmittelbar aus dem folgendem Satz, den wir mit der Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode beweisen.

Satz 3.26. Es gibt keinen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass für jeden (endlichen, ungerichteten) Graphen $G = (V,E)$ gilt:

$$G \models \psi \ \text{gdw. } G \text{ ist zusammenhängend.}$$

Wenn Satz 3.25 falsch wäre, dann gäbe es eine Formel $\varphi(x,y)$, welche in G ausdrückt, dass ein Pfad von x nach y existiert. Aber dann würde $\psi := \forall x \forall y \varphi(x,y)$ ausdrücken, dass G zusammenhängend ist.

Beweis. Wir definieren für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{A}_m$ und einen nicht zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{B}_m$, so dass die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ gewinnt.

Sei $\mathfrak{A}_m$ ein Zyklus der Länge 2^m und $\mathfrak{B}_m$ die disjunkte Vereinigung zweier Kopien von $\mathfrak{A}_m$. Es ist zu zeigen, dass die Duplikatorin $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ gewinnt.

Auf Graphen definieren wir für je zwei Knoten x, y eine Distanz $d(x,y)$ als die Länge eines kürzesten Pfades von x nach y, wenn ein solcher existiert, und $d(x,y) = \infty$, wenn kein solcher Pfad existiert. Für Zahlen $u, v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $u =_n v$, wenn $u = v$ oder $u, v \geq n$.

Behauptung. Die Duplikatorin kann so spielen, dass für alle $i \leq m$ und alle nach i Zügen ausgewählten Elemente $a_1, \dots, a_i \in A_m$ und $b_1, \dots, b_i \in B_m$ gilt: $d(a_j, a_k) =_{2^{m-i+1}} d(b_j, b_k)$.

Für $i = 0, 1$ ist dies trivial. Wir nehmen an, die Behauptung sei nach i Schritten erfüllt und behandeln den Induktionsschritt durch

Fallunterscheidung. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, dass der Herausforderer im $(i+1)$-ten Zug ein Element $a_{i+1} \in \mathfrak{A}_m$ auswählt. Sei a_j das am nächsten bei a_{i+1} liegende unter den bereits ausgewählten Elementen von $\mathfrak{A}_m$, d.h. $d(a_j, a_{i+1}) \leq d(a_k, a_{i+1})$ für alle $k \leq i$.

(a) Sei $d(a_j, a_{i+1}) < 2^{m-i}$. Dann wählt die Duplikatorin b_{i+1} so, dass $d(b_j, b_{i+1}) = d(a_j, a_{i+1})$. Da $d(a_j, a_k) =_{2^{m-i}} d(b_j, b_k)$, schließen wir:
   - Wenn $d(a_j, a_k) = d(b_j, b_k)$, dann auch $d(a_{i+1}, a_k) = d(b_{i+1}, b_k)$;
   - Wenn $d(a_{i+1}, a_k) \geq 2^{m-i+1}$ und $d(b_{i+1}, b_k) \geq 2^{m-i+1}$, dann gilt $d(a_{i+1}, a_k) \geq 2^{m-i+1}/2 = 2^{m-i}$ und analog $d(b_{i+1}, b_k) \geq 2^{m-i}$.

   Also gilt $d(a_{i+1}, a_j) = d(b_{i+1}, b_j)$ und $d(a_{i+1}, a_k) =_{2^{m-i}} d(b_{i+1}, d_k)$.

(b) Sei $d(a_{i+1}, a_j) \geq 2^{m-i}$. Die Duplikatorin wählt b_{i+1} so, dass $d(b_{i+1}, b_k) \geq 2^{m-i}$ für alle $k \leq i$.

Am Ende des Spiels (nach m Zügen) gilt also $d(a_j, a_k) =_2 d(b_j, b_k)$ für alle $j, k \leq m$, d.h.:

$$\begin{aligned} a_j = a_k &\text{ gdw. } b_k = b_k \text{ und} \\ (a_j, a_k) \in E &\text{ gdw. } (b_j, b_k) \in E. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_m \mapsto b_k$ ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}_m$ nach $\mathfrak{B}_m$, d.h. die Duplikatorin gewinnt $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$. Q.E.D.