Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 23.04. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Bitte beachten Sie, dass wegen der Ostertage die Bearbeitungszeit für diese Übung im Gegensatz zu den folgenden Übungen **zwei Wochen** beträgt.

Aufgabe 1 ganz viele Punkte

Drucken Sie sich das Skript zu Kapitel 1 der Vorlesung, das Sie auf der Webseite finden, aus, oder sorgen Sie auf andere Art und Weise dafür, dass Sie das Skript beim Bearbeiten der Aufgaben vorliegen haben und benutzen.

Aufgabe 2 15 Punkte

Diese Aufgabe ist online im L2P-Lernraum der Veranstaltung unter „eTests" zu absolvieren. Um Zugriff auf den Lernraum zu erhalten, melden Sie sich in Campus Office zur Vorlesung an. Falls Sie sich aufgrund Ihres Studiengangs (z.B. Master Informatik) nicht über das modulare Anmeldeverfahren zur Vorlesung anmelden können, schreiben Sie eine E-Mail an schalthoefer@logic.rwth-aachen.de.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ heißt *nicht-trivial* wenn sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar ist. Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, nicht-trivial oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

(i) $((X \to \neg X) \wedge Y) \wedge \Big((Y \wedge \neg Y) \vee \big(Y \to (\neg Z \wedge X \wedge (Z \vee \neg Y))\big)\Big)$;

(ii) $\Big((X \to (Z \to X)) \wedge Y\Big) \vee \Big(Y \to ((Z \vee X) \wedge \neg Y)\Big)$

(iii) $\Big(\neg Z \to ((\neg X \leftrightarrow Y) \wedge (X \to Y))\Big) \wedge \big(Z \to (Y \vee X)\big)$

(b) Zeigen Sie durch Äquivalenzumformungen (siehe Skript S. 6), dass folgende Formeln logisch äquivalent sind:

(i) $\big(Y \to (Q \to \neg(X \to \neg Q))\big) \wedge \big(Y \to (X \vee Q)\big)$ und $Y \to X$;

(ii) $(W \wedge Z) \to (X \wedge Y)$ und $\neg((W \to X) \wedge (W \to Y)) \to ((Z \to X) \wedge (Z \to Y))$;

(iii) $(X \to Z) \vee (Y \wedge (Y \leftrightarrow X)) \vee (Y \wedge (X \leftrightarrow Z))$ und $\neg X \vee Y \vee Z$

Aufgabe 4 10 Punkte

Anton studiert an einer exzellenten Hochschule und möchte sich zur Klausur „Vortäuschung von Kompetenz II“ anmelden. Für die Anmeldung zur Klausur müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

(1) Wenn das blaue Formular vom Hund angefressen wurde, muss ein Entschuldigungsformular beigelegt werden.

(2) Es wird mindestens einer der Passierscheine A38 und B42 benötigt.

(3) Entweder wird ein Entschuldigungsformular oder ein rosa Formular vorgelegt, aber nicht beide.

(4) Entweder wird bescheinigt, dass sowohl „Vortäuschung von Kompetenz I“ als auch „Einführung in Buzzwords“ im aktuellen Semester belegt werden, oder keines von beiden.

(5) Wird „Einführung in Buzzwords“ im aktuellen Semester belegt, kann kein Entschuldigungsformular ausgestellt werden.

(6) Wird „Vortäuschung von Kompetenz I“ nicht belegt, muss ein rosa Formular vorgelegt werden.

Formalisieren Sie die Voraussetzungen in der Aussagenlogik und beweisen oder widerlegen Sie, dass sich Anton zur Klausur anmelden kann, obwohl sein Hund das blaue Formular angefressen hat.

Hinweis: Führen Sie geeignete Aussagenvariablen ein (mit Bedeutung der Belegung) und formalisieren Sie die relevanten Voraussetzungen. Begründen Sie semantisch (d.h. mithilfe von Interpretationen), ob Anton sich zur Klausur anmelden kann.

Aufgabe 5 15 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{0, \rightarrow\}$ bzw. $\{1, \leftrightarrow\}$ funktional vollständig ist.

(b) Sei $f \in B^3$ die durch $f(x, y, z) := 1 - \min(x, y, z)$ definierte Boolesche Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

(c) Für Tupel $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^n$ schreiben wir $\bar{x} \leq \bar{y}$ falls $x_i \leq y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Eine Boolesche Funktion $f \in B^n$ heißt *monoton*, falls für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \{0, 1\}^n$ mit $\bar{x} \leq \bar{y}$ gilt, dass $f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$.

Zeigen Sie, dass man aus $F = \{\wedge, \vee, 0, 1\}$ genau die Klasse der monotonen Funktionen erzeugen kann. Folgern Sie, dass F funktional unvollständig ist.