Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 30.04. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 — 15 Punkte

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob die folgende Formel erfüllbar ist. Geben Sie als Zwischenschritte die Mengen der markierten Variablen an.

$$(X \land V \land Z \to Y) \land (V \land W \to X) \land (1 \to W) \land (X \land Y \land Z \to 0) \land (U \land Z \to W) \land$$
$$(1 \to Z) \land (X \land V \land U \to T) \land (T \land W \to W) \land (T \land W \to X)$$

(b) Für zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \colon \tau \to \{0,1\}$ definieren wir den Schnitt $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$ als $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2(X) := \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$

Beweisen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter Schnitt abschlossen sind, also dass für jede Horn-Formel φ gilt: Ist $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann ist auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel. *Hinweis:* Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(i) $\neg(X \land Y) \to \neg(Z \land Q)$

(ii) $((X \land (\neg Z \lor (W \land Q))) \lor (Y \lor \neg Z)) \land (Z \land Y \to Q)$

(iii) $(X \to ((Z \to Y) \land (Y \land Q))) \land (Z \to (Y \to X))$

Aufgabe 3 — 10 Punkte

(a) Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln, um zu überprüfen, ob die folgende Folgerungsbeziehung gilt.

$$\{X \land Y \land W \to Q, X \land Q \to P, Y \land Y \to W, X, P \land Q \land W \to Y\} \models W \to (X \land Y \land Z)$$

(b) Seien Φ, Ψ Mengen von AL-Formeln, und seien φ, ψ AL-Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \to \psi \models \varphi$

(ii) Wenn $\Phi \models \neg\varphi$ und $\varphi \in \Phi$, dann ist Φ unerfüllbar.

(iii) Wenn $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ und $\Psi \models \varphi$, dann auch $\Phi \models \varphi$.

Aufgabe 4 10 Punkte

Hypergraphen sind Graphen, bei denen jede Kante beliebig viele Knoten verbinden kann. Wir betrachten hier folgende Klasse von Hypergraphen: Ein *3-uniformer Hypergraph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten ist und E eine Menge von dreielementigen Teilmengen von V, den Kanten oder *Hyperkanten*.

Ein *dreidimensionales Matching* ist eine Menge $M \subseteq E$ von Hyperkanten deren Endknoten paarweise disjunkt sind, also $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ für alle $e_1, e_2 \in M$ mit $e_1 \neq e_2$. Ein *perfektes* dreidimensionales Matching ist ein dreidimensionales Matching M, das alle Knoten abdeckt, bei dem also für jeden Knoten in V eine Kante $e \in M$ mit $v \in e$ existiert.

Beweisen Sie mit dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik:

Sei G ein unendlicher 3-uniformer Hypergraph, sodass jeder endliche Teilgraph H von G zu einem endlichen Teilgraphen H' von G erweitert werden kann, der ein perfektes dreidimensionales Matching hat. Weiterhin sei G endlich verzweigt, d.h. jeder Knoten ist nur zu endlich vielen Hyperkanten inzident. Dann hat G ein perfektes dreidimensionales Matching.