Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 21.05. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 noch mehr Punkte

Laden Sie das zweite Kapitel des Skripts herunter und sorgen Sie dafür, dass Sie das Skript beim Bearbeiten der Übung vorliegen haben.

Aufgabe 2 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 3 5 Punkte

(a) Geben Sie alle Redukte von $(\mathbb{R}, +, 0, 1)$ an.

(b) Sei $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ mit der üblichen Belegung von $\cdot$ und 1. Geben Sie für die folgenden Mengen jeweils an, ob eine Substruktur von $\mathfrak{Q}$ über der jeweiligen Menge existiert (mit Begründung). Falls nicht, geben Sie die kleinste Substruktur an, deren Universum die Menge enthält.

(i) $\mathbb{Z}$

(ii) $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\}$.

(c) Geben Sie alle Substrukturen von $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, f, g)$ an, wobei $f^{\mathfrak{N}}(n) = n \mod 3$ und $g^{\mathfrak{N}}(n) = n + 3$ für alle n.

Aufgabe 4 5 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen über dem Universum A bzw. B, sodass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie per Induktion über den Termaufbau: Für jeden Term t und jede Belegung $\beta : \text{var}(t) \mapsto A$ gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = [\![t]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)} \quad .$$

(b) Sei τ eine Signatur und sei $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur über dem Universum B. Beweisen Sie, dass für jede quantorenfreie Formel $\varphi \in \text{FO}(\tau)$, alle Substrukturen $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \tau), \mathfrak{A}_2 = (A_2, \tau)$ von $\mathfrak{B}$ und alle $a_1, \ldots, a_k \in A_1 \cap A_2$ gilt:

$$\mathfrak{A}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \text{ gdw. } \mathfrak{A}_2 \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \quad .$$

Folgern Sie, dass alle Substrukturen von $\mathfrak{B}$ die gleichen quantorenfreien Sätze erfüllen.

Aufgabe 5 10 Punkte

Die Studierenden, die an der Vorlesung „Vortäuschung von Kompetenz II“ teilnehmen, werden in einer Datenbank verwaltet. Dabei wird in einer Tabelle S zu allen Studierenden jeweils der Name und die Matrikelnummer gespeichert, sowie die Anzahl der Vorlesungstermine im aktuellen Semester, in denen aus Richtung der Person ein Windows-Startton zu hören war. In einer Tabelle U wird zu jedem Übungsblatt pro Matrikelnummer gespeichert, wie viele Punkte die Person in der Übung erreicht hat und wie oft sie im dazugehörigen Tutorium über die Witze des Assistenten gelacht hat.

(a) Formalisieren Sie den folgenden Zustand der Datenbank gemäß der Definition im Skript als endliche Struktur:

- Anton hat die Matrikelnummer 12345 und man hat bereits 17 mal den Windows-Startton aus seiner Richtung gehört. In der ersten Übung hat er 23 Punkte erreicht und 5 mal über Witze des Assistenten gelacht.
- Barbara hat die Matrikelnummer 42350 und man hat nie den Windows-Startton aus ihrer Richtung gehört. In der ersten Übung hat sie 30 Punkte erreicht und hat einmal über einen Witz des Assistenten gelacht.

(b) Formulieren Sie die folgenden Bedingungen in Prädikatenlogik (d.h. geben Sie prädikatenlogische Formeln über der in Aufgabenteil (a) definierten Signatur an, die in genau den relationalen Datenbanken gelten, die die Bedingungen erfüllen).

(i) Zu jeder Matrikelnummer, zu der Übungspunkte eingetragen sind, gibt es genau einen Eintrag in S.

(ii) Um in den Anfragen ausnutzen zu können, dass Übungspunkte natürliche Zahlen und damit geordnet sind, erweitern wir nun die Signatur um ein zweistelliges Relationssymbol $<$. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel an, die definiert, dass die in der Datenbank erfassten Punktzahlen durch die Relation $<$ linear geordnet sind.

(iii) Benutzen Sie die im vorherigen Aufgabenteil definierte Relation, um zu definieren, dass alle Studierenden, die mindestens einmal über einen Witz des Assistenten gelacht haben, in jedem Übungsblatt mehr Punkte erhalten haben als die Person mit der kleinsten Punktzahl.

(c) Sei $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \left(Sx_1x_2x_3 \wedge \neg \left(\forall y_2 \left(y_2 \neq x_2 \rightarrow \neg \exists y_3 (Sx_1y_2y_3)\right)\right)\right)$. Formulieren Sie in natürlicher Sprache, welche Eigenschaft der oben beschriebenen relationalen Datenbank φ definiert, wenn Sie dieselbe Modellierung wie in Teilaufgabe (a) annehmen, und geben Sie ein beliebiges Modell von φ an.