Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 28.05. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

Sei $\tau = \{P, Q, R, c\}$, wobei P ein einstelliges Relationssymbol ist, R und Q zweistellige Relationssymbole und c ein Konstantensymbol. Bringen Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform, in Pränex-Normalform und in Skolem-Normalform. Achten Sie dabei auf freie Variablen.

(a) $\neg\exists x Rxy \wedge \forall y \exists z((Ryz \wedge Qzy) \vee \neg(Py \vee Ryx))$

(b) $\forall x \forall y \exists z(Rxy \wedge Ryz \wedge \neg Rzx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \exists x \forall y \neg(Rxy \wedge Rcx))$

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Wir erweitern FO durch die Zählquantoren[1] $\exists^{\leq k}$, $\exists^{\geq k}$, $\exists^{=k}$ für $k \geq 1$, mit der Semantik

- $[\![\exists^{\leq k} x\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ genau dann, wenn höchstens k verschiedene $a \in A$ existieren mit $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]} = 1$,
- $[\![\exists^{\geq k} x\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ genau dann, wenn mindestens k verschiedene $a \in A$ existieren mit $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]} = 1$,
- $[\![\exists^{=k} x\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ genau dann, wenn genau k verschiedene $a \in A$ existieren mit $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]} = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass FO mit Zählquantoren nicht ausdrucksstärker ist als FO, also dass zu jeder Formel in FO mit Zählquantoren eine äquivalente Formel ohne Zählquantoren existiert.

(b) Geben Sie für jeden Zählquantor geeignete logische Äquivalenzen an, die es erlauben, Negationen nach innen zu ziehen (analog zu $\neg\exists x\psi \equiv \forall x \neg\psi$) oder, falls möglich, zu eliminieren. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Äquivalenzen.

(c) Sei
$$\varphi = \forall x \exists y(Fxy \wedge \forall z(Fxz \rightarrow y = z)) \wedge \forall x \forall y \forall z(Fxz \wedge Fyz \rightarrow x = y) \ .$$
Beschreiben Sie die durch φ axiomatisierte Modellklasse und axiomatisieren Sie diese Klasse durch eine Formel der Form $\forall x \exists^{\leq 1} y\varphi \wedge \forall x \exists^{=1} y\vartheta$ mit atomaren Formeln φ und ϑ.

[1] im Folgenden bezeichnet FO weiterhin die in der Vorlesung definierte Prädikatenlogik, also Prädikatenlogik ohne Zählquantoren.

Aufgabe 4 10 Punkte

Wir betrachten Transitionssysteme über der Signatur $\{E, P, Q\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol E und einstellige Relationssymbole P und Q, also gerichtete Graphen mit Knotenbeschriftung.

(a) Geben Sie eine FO-Formel an, die definiert, dass jeder Knoten, der einen Nachfolger hat, auch einen Nachfolger in Q hat.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe des Model Checking Spiels, dass Ihre Formel im unten angegebenen Graphen mit Universum $\{v_0, v_1\}$ gilt. Konstruieren Sie dazu den Spielgraphen und geben Sie eine Gewinnstrategie für die Verifiziererin oder den Falsifizierer an.