Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 04.06. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 5 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 12 Punkte

Seien R und $<$ zweistellige Relationssymbole, S und T einstellige Relationssymbole, sei f ein einstelliges Funktionssymbol, und sei g ein zweistelliges Funktionssymbol. Geben Sie (wenn möglich endliche) Axiomensysteme für die folgenden Klassen von Strukturen an.

(a) $\{(A, R) \mid R$ ist der Graph einer bijektiven Funktion$\}$

(b) $\{(A, <, f) \mid \text{Bild}(f)$ ist unendlich und $<$ ist eine partielle Ordnung $\}$

(c) $\{(A, <, f) \mid \text{Bild}(f)$ ist unendlich, $<$ ist eine lineare Ordnung und $a < f(a)$ für alle $a \in A\}$

(d) $\{(A, <, g, S) \mid (A, g)$ ist eine Gruppe, in der alle Elemente höchstens Ordnung 17 haben und $<$ ist eine lineare Ordnung auf S $\}$ (die Ordnung eines Elements a einer Gruppe ist die kleinste Zahl k sodass $a^k = e$)

(e) $\{(A, g, R, S, T) \mid S$ und T partitionieren A, S und T bilden jeweils eine Gruppe bezüglich g und R ist der Graph einer Funktion h mit $h(S) = T$ $\}$

Aufgabe 3 8 Punkte

(a) Eine lineare Ordnung ist diskret, falls jede Element das nicht minimal ist einen eindeutigen Vorgänger hat, und jedes Element das nicht maximal ist einen eindeutigen Nachfolger hat. Sei T die Theorie der diskreten linearen Ordnungen. Geben Sie ein Axiomensystem für T an. Ist T vollständig? Falls ja, beweisen Sie, dass alle Modelle von T elementar äquivalent sind, falls nicht, geben Sie zwei Strukturen in der Modellklasse von T an, und beweisen Sie, dass diese nicht elementar äquivalent sind.

(b) Sei $\mathfrak{G} = (G, \circ, e)$ eine beliebige endliche Gruppe. Beweisen Sie, dass dann die Klasse $\{\mathfrak{G}' = (G', \circ, e) \mid \mathfrak{G}'$ ist eine Gruppe, und eine Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ ist isomorph zu $\mathfrak{G}\}$ endlich FO-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4 10 Punkte

In dieser Aufgabe soll eine Charakterisierung für die Automorphismen der Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \cdot)$ erarbeitet werden.

(a) Beweisen Sie, dass für jeden Automorphismus $\pi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ der Struktur $\mathfrak{N}$ gilt: Die Einschränkung von π auf die Menge der Primzahlen ist bijektiv.

(b) Sei π ein Automorphismus der Menge der Primzahlen. Beweisen Sie, dass ein eindeutiger Automorphismus von $\mathfrak{N}$ existiert, der π erweitert.

(c) Benutzen Sie die bisherigen Aufgabenteile sowie das Isomorphielemma, um zu zeigen, dass die obige Charakterisierung auch die Automorphismen der Struktur $\mathfrak{M} = (\mathbb{N}, \cdot, R)$ beschreibt, wobei $R^{\mathfrak{M}}$ die Menge der Vielfachen von 3 ist.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in $(\mathbb{N}, \cdot)$ elementar definierbar sind:

(i) $R_1 = \{4, 9\}$;

(ii) $R_2 = \{n \mid n \text{ hat mindestens } k \text{ verschiedene Primfaktoren }\}$

(iii) $R_3 = \{(\ell, m, n) \mid n = \ell + m\}$.