Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 18.06. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Ende der Woche wird ein zusätzlicher eTest zur Wiederholung der bisherigen Themen veröffentlicht. Dieser Test wird zusätzlich zum eTest des aktuellen Übungsblatts angeboten und die dort erreichten Punkte zählen als Bonuspunkte.

Aufgabe 1 7 Punkte

(a) Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei $\mathfrak{T} = (\{0,1\}^*, \preceq, E, P)$, wobei $\{0,1\}^*$ die Menge der endlichen Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$ bezeichnet, und

- $\preceq$ die *Präfix-Relation* auf $\{0,1\}^*$ ist, d.h. $v \preceq w$ genau dann, wenn $w = vz$ für ein $z \in \{0,1\}^*$, und
- E die *gleiche-Länge-Relation* auf $\{0,1\}^*$ ist, d.h. $(v,w) \in E$ genau dann, wenn $|v| = |w|$, also genau dann, wenn die Worte v und w die gleiche Länge haben, und
- P eine einstellige Relation ist (die im Folgenden auf unterschiedliche Weise festgelegt werden wird).

Zeigen oder widerlegen Sie für die jeweils angegebene Relation, dass sie in $\mathfrak{T}$ (unter Berücksichtigung der jeweiligen Definition von P) elementar definierbar ist.

Für die beiden folgenden Aufgabenteile gelte $P = \emptyset$.

(a) $R_a = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \leq 4\}$.

(b) $R_b = \{w \in \{0,1\}^* : 01 \preceq w\}$.

Ab sofort sei $P = \{w \in \{0,1\}^* : w = w_1 \cdots w_n \text{ und } w_n = 0\} = (0+1)^*0$.

(c) $R_c = \{w \in \{0,1\}^* : 01 \preceq w\}$.

(d) $R_d = \{(u,v) \in E : u = u_1 \cdots u_n \text{ und } v = v_1 \cdots v_n \text{ mit } (u_i = 0 \text{ gdw. } v_i = 1) \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$.

(e) $R_e = \{w \in \{0,1\}^* : \text{der Buchstabe 1 kommt gerade oft in } w \text{ vor}\}$.

Aufgabe 3 8 Punkte

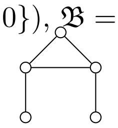
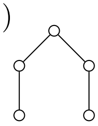
(a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen über einer relationalen Signatur τ, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Strukturen (A, F), sodass F der Graph einer Funktion f ist, sodass $f^{-1}(a)$ für jedes $a \in A$ endlich ist, nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4 10 Punkte

(a) Betrachten Sie folgende relationale Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall einen Satz vom Quantorenrang m an, welcher die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(i) $\mathfrak{A} = (\{0\})$, $\mathfrak{B} = (\{1, 2\})$

(ii) $\mathfrak{A} =$  $\mathfrak{B} =$ 

(iii) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, P)$, $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, P)$, wobei P der Graph der Addition ist.

(b) Geben Sie für die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf Seite 81 im Skript einen trennenden Satz mit Quantorenrang 3 an.