

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 02.07. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 9 Punkte

(a) Geben Sie einen Beweis im Sequenzenkalkül für die folgende Sequenz an:

$$\exists x \exists y (Exy \vee (Py \wedge x = y)) \Rightarrow \exists x Px, \exists x \exists y Exy$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe des Sequenzenkalküls, dass die Formel

$$\exists x \exists y (fx = y \wedge x = y) \vee \forall x (\neg fx = x)$$

allgemeingültig ist.

(c) Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier x rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann. (*Hinweis*: Sie können annehmen, dass das Universum ein Dorf ist.)

Aufgabe 3 11 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln für das Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik:

(i)
$$\frac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \Rightarrow \exists x \psi(x), \Delta \quad \Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma, \varphi(c) \Rightarrow \Delta, \vartheta}$$

(ii)
$$\frac{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow c = d \quad \Gamma, \psi(c) \Rightarrow \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \neg \psi(d), \vartheta}$$

(iii)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}$$

(b) Im Sequenzenkalkül der Aussagenlogik ist ein Ableitungsbaum, in dem ein Blatt mit einer nicht gültigen Sequenz beschriftet ist, bereits ein Beweis, dass die Sequenz in der Wurzel nicht gültig ist. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft für den Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei der Zählquantor $\exists^{\leq 1}$ wie in Übung 6 definiert. Geben Sie analog zu den Regeln $(\exists \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \exists)$ Schlussregeln an, die die Einführung des Quantors $\exists^{\leq 1}$ auf der linken bzw. rechten Seite erlauben, wobei die Anzahl der Quantoren und Junktoren in den Prämissen echt kleiner ist als in der Konklusion.