Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 09.07. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 6 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 14 Punkte

(a) Beweisen Sie mit dem Vollständigkeitssatz oder widerlegen Sie:

  (i) Sei Ψ ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$, und sei Φ eine Satzmenge, sodass für jedes $\psi \in \Psi$ eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert mit $\Phi_0 \vdash \psi$. Dann ist $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar.

  (ii) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Satzmenge und $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Dann existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

  (iii) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ein Axiomensystem für eine Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen. Wenn $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar ist, dann existiert ein Satz ψ und eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ sodass sowohl $\Phi_0 \cup \{\psi\}$ als auch $\{\neg\psi, \neg\varphi\}$ für alle $\varphi \in \Phi$ inkosistent sind.

(b) Sei $\mathcal{K} = \{(A, \sim) \mid \sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und jede Äquivalenzklasse ist unendlich $\}$. Geben Sie ein an Axiomensystem für die Klasse $\mathcal{K}$ an.

(c) Benutzen Sie Aufgabenteil a) um zu beweisen, dass die Klasse $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

(d) Seien $\sim, R$ zweistellige Relationssymbole, und sei f ein zweistelliges Funktionssymbol. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgende Klasse von Strukturen axiomatisierbar bzw. endlich axiomatisierbar ist: $\{(A, R, f, \sim) \mid \sim$ ist eine Kongruenzrelation$\}$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei 0 eine Konstante, und sei s ein 1-stelliges, a ein 2-stelliges Funktionssymbol, R ein 1-stelliges Relationssymbol.
Wir betrachten die folgende Satzmenge T:

$$\begin{aligned} T := \; & \{a00 = 0, as0s0 = ss0, as00 = s0\} \\ & \cup \{astt' = satt', atst' = satt' \mid t, t' \text{ Terme}\} \\ & \cup \{Rs^n0 \mid n \text{ gerade}\}. \end{aligned}$$

(a) Sei Σ der Abschluss von T unter Substitution.
Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) = \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$.

(c) Ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ein Modell von T?

(d) Sei $T' := T \cup \{\forall x(Rx)\}$. (Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution.) Zeigen Sie: T' ist erfüllbar, aber $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$.