Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2014

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 16.07. um 09:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Hinweis: Aufgaben, die mit einem * versehen sind, geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 16 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit Hilfe des Kompaktheitssatzes.

(a) Die Klasse der endlichen Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$

(b) Die Klasse der unendlichen Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$

(c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen G, für die ein $k \geq 4$ existiert, sodass G eine Clique der Größe k enthält

(d) Die Klasse aller ungerichteten Graphen, die keine unendliche Clique enthalten

(e) Die Klasse der regulären Graphen (ein Graph ist regulär, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert sodass jeder Knoten genau k Nachbarn besitzt)

Aufgabe 2 14 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit einer Methode Ihrer Wahl.

(a) Die Klasse der zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ isomorphen Strukturen

(b) Die Klasse der zu $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}, +)$ isomorphen Strukturen

(c) Die Klasse aller Strukturen, die für ein $n \in \mathbb{N}^{>0}$ zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind

(d) $\{(A, R) \mid |R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R})|\}$

(e) Die Klasse der *zyklischen* Gruppen, d.h. Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$, in denen ein Element $g \in G$ existiert mit $G = \{g^z : z \in \mathbb{Z}\}$; hierbei ist g^z induktiv definiert durch $g^0 := e$ (das neutrale Element der Gruppe G), und $g^{n+1} := g^n \circ g$ und $g^{-n} := (g^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(f) Die Klasse aller ungerichteten Graphen ohne Kreise

Aufgabe 3* 16* Punkte

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Resolutionsmethode, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg C, F\}, \{E, B, D\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg D\}, \{\neg E\}, \{D, E, \neg F\}, \{\neg A, F\}, \{\neg D, E\}\}$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Formeln jeweils, dass sie äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

(i) $\varphi_i := (X \wedge \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X)$

(ii) $\varphi_{ii} := (\neg X \vee (Y \wedge Z)) \wedge (Z \wedge ((X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)))$

(c) Überprüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln, ob folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{B,\ E,\ B \wedge G \to A,\ B \wedge E \to F,\ F \wedge D \to G,\ B \wedge F \to D,\ A \wedge B \to C\} \models A \vee C$$

Aufgabe 4* 14* Punkte

(a) Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \cdot)$ der natürlichen Zahlen mit der üblichen Multiplikation und die Struktur $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, \cdot)$ der ganzen Zahlen mit der üblichen Multiplikation. Geben Sie einen FO($\{\cdot\}$)-Satz φ an, so dass $\mathfrak{N} \models \varphi$ und $\mathfrak{Z} \not\models \varphi$.

(b) Wir betrachten die folgenden Strukturen über der Signatur $\tau = \{\circ\}$, wobei $\circ$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= (\{0,1\}, \circ), \text{ mit } a \circ^{\mathfrak{A}_1} b = [\![a \wedge b]\!] = \min(a,b)\\
\mathfrak{A}_2 &= (\{0,1\}, \circ), \text{ mit } a \circ^{\mathfrak{A}_2} b = [\![a \vee b]\!] = \max(a,b)\\
\mathfrak{A}_3 &= (\{0,1\}, \circ), \text{ mit } a \circ^{\mathfrak{A}_3} b = [\![a \text{ XOR } b]\!] = a + b \mod 2
\end{aligned}$$

Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1,2,3\}$ mit $i < j$ jeweils, dass es einen Satz $\varphi_{ij} \in \mathrm{FO}(\tau)$ gibt, mit $\mathfrak{A}_i \models \varphi_{ij}$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_{ij}$.