Aufgabe 1

(a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ an.

(b) Geben Sie für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ die kleinste Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ an, welche m und n enthält. Ist dies eine echte Substruktur?

Aufgabe 2

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
Ein Wort $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{w} := (\{0, \cdots, n-1\}, <, P_a, P_b),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist, und $i \in P_j$ genau dann gilt, wenn $w_i = j$.
Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen FO($\{<, P_a, P_b\}$)-Satz an, der diese definiert.

(a) $\{w \mid w_i = a \text{ für mind. ein } i\}$

(b) $\{w \mid w_0 = a \text{ und } w_{n-1} = b\}$

(c) $\{w \mid abba \text{ kommt als Infix vor}\}$

(d) $\{w \mid \text{ hinter jedem } a \text{ kommt noch mind. ein } b\}$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper. Diskutieren Sie Möglichkeiten, einen K-Vektorraum V als eine mathematische Struktur im Sinne von Definition (2.2) darzustellen.