Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregel:

$$\frac{\Gamma, \exists x \varphi(x), \vartheta \;\Rightarrow\; \forall x \psi(x)}{\Gamma, \varphi(c) \;\Rightarrow\; \neg\vartheta, \psi(c)}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass in der Schlussregel

$$(\Rightarrow \forall)\,\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(c)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x \psi(x)}$$

die Bedingung, dass c nicht in Γ, Δ und ψ vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

Aufgabe 3

Formalisieren Sie die Aussage "Everybody loves my baby, but my baby loves nobody but me" in der Prädikatenlogik und beweisen Sie mithilfe des Sequenzenkalküls, dass daraus folgen würde: 'I am my baby'.

Aufgabe 4

Wir erweitern das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ über endlicher Signatur τ, in der auch Funktionen vorkommen können. Wir fügen dafür die Bedingung hinzu, dass der Herausforderer genau dann gewinnt, wenn $\mathfrak{A}$ in Zug i nicht dieselben quantorenfreien Formeln mit höchstens i freien Variablen erfüllt wie $\mathfrak{B}$, wobei jeweils die im selben Zug gewählten Elemente a_j, b_j für dieselbe freie Variable eingesetzt werden.

(a) Ändert sich die Gewinnbedingung für relationale Signaturen gegenüber der in der Vorlesung definierten Variante des Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels?

(b) Gilt der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé auch für diese Variante des Spiels?

(c) Diskutieren Sie, wie mithilfe von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen bewiesen werden kann, dass eine Klasse von Strukturen über einer funktionalen Signatur nicht (endlich) axiomatisierbar ist.