Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 29.04. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind freiwillige Zusatzaufgaben.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2 10+5* Punkte

(a) Sei $f \in B^3$ eine Boolesche Funktion, für die gilt:

$$f(x, \neg x, x) = f(x, 0, 0) = 1 \text{ und}$$
$$f(x, x, \neg x) = f(x, 1, 1) = 0.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist, geben Sie eine AL-Formel $\varphi(X_1, X_2, X_3)$ an, die f definiert, und zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist.

(b) Es sei $\oplus$ die Addition modulo 2. Eine Boolesche Funktion $f \in B^n$ heißt *affin*, wenn sie eine Darstellung der Form $f(x_1, \dots, x_n) = b_1x_1 \oplus b_2x_2 \oplus \dots b_nx_n \oplus c$ für Konstanten $b_1, \dots, b_n, c \in \{0, 1\}$ hat, wobei b_ix_i die übliche Multiplikation auf $\{0, 1\}$ bezeichne, d.h. es gilt $b_ix_i \equiv b_i \wedge x_i$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen, die sich mit $\{\leftrightarrow, \neg\}$ darstellen lassen, gerade die affinen Funktionen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $\{\leftrightarrow, \neg\}$ nicht funktional vollständig ist.

Hinweis: Berechnen Sie für geeignetes n die Anzahl der n-stelligen affinen Funktionen.

(iii)* Zeigen Sie, dass $\{\leftrightarrow, \neg\}$ unter Hinzunahme einer beliebigen nicht-affinen Funktion funktional vollständig ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\{\oplus, \wedge, 1\}$ funktional vollständig ist und folgern Sie daraus, dass jede Boolesche Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Darstellung als Polynom in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit $\oplus$ als Addition, $\wedge$ als Multiplikation und Koeffizienten aus $\{0, 1\}$ besitzt. Betrachten Sie nun nicht-affine Boolesche Funktionen in ihrer Polynomdarstellung.

Aufgabe 3 10+5* Punkte

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, ob die folgende Formel erfüllbar ist. Geben Sie als Zwischenschritte die Mengen der markierten Variablen an.

$$(A \wedge B \to 0) \wedge (E \wedge F \to C) \wedge (1 \to A) \wedge (1 \to F) \wedge (A \to E) \wedge (C \to G)$$
$$\wedge (E \wedge G \wedge A \to H) \wedge (H \to E) \wedge (A \wedge F \wedge H \to B)$$

(b) Für zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \colon \tau \to \{0,1\}$ definieren wir den Schnitt $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$ als $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2(X) := \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$

Beweisen Sie, dass Modelle von Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, also dass für jede Horn-Formel φ gilt: Ist $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann ist auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Horn-Formel ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt. Gilt auch die Umkehrung, also ist jede Formel, die ein eindeutiges kleinstes Modell besitzt, äquivalent zu einer Horn-Formel?

Hinweis: Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind zu einer Horn-Formel.

(i) $(X \wedge Y) \to (Z \vee Q)$;

(ii) $X \wedge \neg(\neg Y \to (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \to (Y \vee \neg Z))$;

(iii) $(X \vee \neg X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (X \to (Y \wedge Z))$.

Hinweis: Verwenden Sie für Ihre Argumentation Aufgabenteil (b).

(e)* Beweisen Sie die Umkehrung von (b), d.h. dass jede Formel, deren Modelle unter Schnitt abgeschlossen sind, logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

Aufgabe 4 10 Punkte

Eine Formelmenge Φ heißt *unabhängig*, wenn für kein $\varphi \in \Phi$ gilt: $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$.

(a) Wann ist eine Menge, die nur aus einer einzelnen Formel besteht, unabhängig?

(b) Zwei Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ heißen *logisch äquivalent*, wenn für jede zu Φ und Ψ passende Interpretation $\mathcal{J}$ gilt, dass $\mathcal{J}$ genau dann ein Modell von Φ ist, wenn $\mathcal{J}$ ein Modell von Ψ ist.

Zeigen Sie, dass jede endliche Formelmenge eine logisch äquivalente unabhängige Teilmenge enthält.

(c) Gilt diese Eigenschaft auch für unendliche Mengen? Betrachten Sie dazu die Menge

$$\Phi = \{ \bigwedge_{0 \le i \le n} X_i : n \in \mathbb{N}\}.$$

Geben Sie eine zu Φ logisch äquivalente, unabhängige Formelmenge an.

(d) Beweisen Sie, dass eine Formelmenge genau dann unabhängig ist, wenn alle ihre endlichen Teilmengen unabhängig sind.