

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 13.05. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2

6 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

- (a) $(X \rightarrow Y), (Z \rightarrow Y) \Rightarrow (X \vee Z), \neg Y$
- (b) $(X \vee Y), Y \rightarrow (Z \vee X) \Rightarrow X, Z$
- (c) $(X \rightarrow Z), (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \vee Y) \rightarrow Z$

Aufgabe 3

8 Punkte

- (a) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für folgende Sequenzen:
 - (i) $(Y \rightarrow X), (Y \rightarrow (\neg Z \vee X)) \Rightarrow (X \wedge Z), (\neg Y \vee \neg Z)$
 - (ii) $X \vee Y, Y \rightarrow (Z \vee X) \Rightarrow X$
- (b) Erläutern Sie wie sich das Suchverfahren für Beweise im Sequenzenkalkül (Algorithmus 1.3) als Entscheidungsverfahren für das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik verwenden läßt. Ist dies ein effizientes Verfahren?

Aufgabe 4

6 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

- (a)
$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi}$$
- (b)
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$$
- (c)
$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \varphi}$$

Aufgabe 5

10 Punkte

- (a) Sei $|$ der logische Junktor für NAND, definiert durch $\mathfrak{J} \models (\varphi | \psi)$ gdw. $\mathfrak{J} \not\models (\varphi \wedge \psi)$.

Geben Sie Schlussregeln $(| \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow |)$ an, die Ihnen erlauben, den Junktor $|$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion einzuführen (analog zu den Schlussregeln $(\wedge \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \wedge)$ für \wedge) und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.

Konstruieren Sie einen Beweis für die Sequenz

$$(X | Y) | Z \Rightarrow (Z \rightarrow X) \wedge (Z \rightarrow Y)$$

in dem um die Schlussregeln $(| \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow |)$ erweiterten Sequenzenkalkül.

- (b) Zeigen Sie, dass die folgende Schlussregel korrekt ist:

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta}$$

Für die Regeln des Sequenzenkalküls gilt, dass aus der Gültigkeit der Konklusion auch die Gültigkeit aller Prämissen folgt. Zeigen Sie dies für die Implikationsregeln $(\rightarrow \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \rightarrow)$. Gilt dies auch für obige Regel? Zeigen oder widerlegen Sie, dass Satz 1.32 für den um diese Regel erweiterten Sequenzenkalkül gilt.