Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 03.06. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 10 Punkte

Seien R und S zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionsymbol. Formen Sie folgende Formeln in Negations- Pränex- und Skolem-Normalform um:

(a) $\varphi := \forall x(\forall y(\exists yRxy \to \exists x(Sxy \land fxy = u)) \to \exists xSfxyu) \lor \exists xfxx = u$

(b) $\psi := \forall x\forall y(\forall z(x \neq fyz \lor \exists uRzu) \to (Sxz \land \exists xRxy))$.

Aufgabe 2 10 Punkte

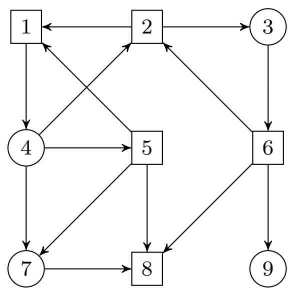
Sei $\mathfrak{A} := (\{0,1,2\}, \circ)$ eine Struktur mit einer zweistelligen Funktion $x \circ y := x \cdot y \bmod 3$. Wir betrachten die Formel $\psi := \forall x\exists y(y \circ y = x \lor y \circ y \circ y = x)$.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Betrachten Sie folgenden Spielgraphen, in dem i eine Position von Spieler 0 und $\boxed{j}$ eine Position von Spieler 1 bezeichnet.



Bestimmen Sie für jeden Knoten, ob ein Spieler von dort aus eine Gewinnstrategie besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

(b) Geben Sie einen endlichen Spielgraphen an, in dem es Positionen gibt, von denen aus keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $G = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph. Geben Sie FO-Formeln an, die ausdrücken, dass Spieler 0 von Position x aus

(a) nach höchstens zwei Schritten verloren hat, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt;

(b) eine Gewinnstrategie hat, welche in höchstens n Schritten zum Sieg führt (für festes n);

(c) erzwingen kann, in höchstens n Schritten (für festes n) nach y zu gelangen.

Erläutern Sie jeweils kurz Ihre Formeln.