Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 10.06. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 10 Punkte

Seien f ein einstelliges Funktionssymbol, g ein zweistelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie (wenn möglich endliche) Axiomensysteme für die folgenden Klassen von Strukturen an.

(a) $\{(A, R) \mid R$ ist eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen$\}$

(b) $\{(A, f) \mid f$ ist eine fixpunktfreie Bijektion$\}$

(c) $\{(A, R, f, g) \mid f \in \mathrm{Aut}((A, R, f, g))\}$

(d) $\{(A, R) \mid (A, R)$ ist ein ungerichteter Graph der für jedes $n \geq 1$ eine Clique der Größe n enthält$\}$

(e) $\{(A, R) \mid (A, R)$ ist ein ungerichteter Graph der für alle nichtleere, endliche und disjunkte Teilmengen $S, T \subseteq A$ einen Knoten enthält, der mit allen Knoten aus S aber mit keinem Knoten aus T verbunden ist$\}$

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +)$ von $(\mathbb{Q}, +)$ und zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +) \cong (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Elemente und Mengen welche in $(\mathbb{Q}, +)$ definierbar sind.

Aufgabe 3 10 Punkte

Geben Sie FO-Formeln an, welche die jeweilige Relation bzw. Funktion in der angegebenen Struktur definieren oder beweisen Sie, dass es keine solche Formel gibt.

(a) Die Konstante 1 in $(\mathbb{N}, +)$

(b) Die Konstante 1 in $(\mathbb{Z}, +)$

(c) Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in $(\mathbb{Q}, <)$

(d) Die Relation $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid\ a < b$ und a ist gerade$\}$ in $(\mathbb{N}, +)$

(e) Die Menge $\{a \in \mathbb{R} \mid\ f$ ist differenzierbar in $a\ \}$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, f)$, wobei f eine 1-stellige Funktion sei.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie. T heißt *vollständige Erweiterung* einer Theorie $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$, falls T vollständig ist und $T' \subseteq T$ gilt. $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ heißt *(endlich) axiomatisierbar*, falls es eine (endliche) Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(T)$ gibt. In diesem Fall nennt man Φ ein *Axiomensystem* für T.

(a) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie. Zeigen Sie, dass T genau dann vollständig ist, wenn $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ für eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt.

(b) Geben Sie jeweils ein Axiomensystem für T und für jede vollständige Erweiterung von T an.

  (i) Die Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\{E\})$ der ungerichteten Graphen (V, E) mit $|V| = 3$.

  (ii) Die Theorie $T = \{\varphi \in \mathrm{FO}(\emptyset) \mid \varphi \text{ ist Tautologie}\}$ aller Mengen (A).

(c) Sei T eine endlich axiomatisierbare Theorie mit nur endlich vielen vollständigen Erweiterungen $T_1, \dots, T_n$. Zeigen Sie, dass dann auch jede der Theorien $T_1, \dots, T_n$ endlich axiomatisierbar ist.