Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

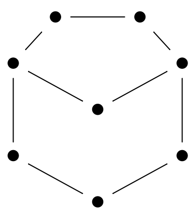
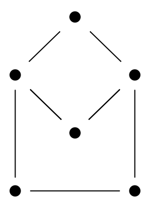
8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 17.06. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 10 Punkte

Betrachten Sie folgende Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl m mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(a) $\mathfrak{A} :=$  und $\mathfrak{B} :=$ 

(b) $\mathfrak{A} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ und $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq)$ (Potenzmengen von $\mathbb{N}$ und $\{0,1\}$);

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M)$, wobei M der Graph der Multiplikation ist;

(d) $\mathfrak{A} := (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{R}, <)$.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:
Sei Φ eine Menge von FO-Formeln über einer relationalen Signatur τ, $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ die durch Φ axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei $\mathcal{B}$ eine τ-Struktur. Wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$, dann gilt $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht FO-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

Ein Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ kann man als Struktur über der Signatur $\tau = \{V_0, V_1, E\}$ auffassen: Das Universum ist V, V_0 und V_1 sind unäre Relation und E ist eine binäre Relation. Zeigen Sie, dass keine Formel $\varphi(x) \in FO(\tau)$ existiert, so dass für jedes Spiel $\mathcal{G}$ gilt:

$$\mathcal{G} \models \varphi(v) \iff v \text{ ist in der Gewinnregion von Spieler 0.}$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass transitive Hüllen nicht FO-definierbar sind.

Aufgabe 4* 10* Punkte

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der Satz (3.21) von Ehrenfreucht-Fraïsse nur für endliche Signaturen gilt. Genauer wollen wir zeigen: Es gibt eine abzählbare relationale Signatur τ und zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so dass der Herausforderer das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, obwohl $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.

Sei dazu $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der co-endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, also $B = \{\mathbb{N} \setminus M : M \in A\}$.

Wir setzen $\tau := \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ für unäre Prädikate P_i und wir definieren

- $\mathfrak{A} := (A, P_0, P_1, P_2, \dots)$, wobei für $i \in \mathbb{N}$ gelte, dass $M \in P_i$ gdw. $i \in M$, und
- $\mathfrak{B} := (B, P_0, P_1, P_2, \dots)$, wobei analog für $i \in \mathbb{N}$ gelte, dass $M \in P_i$ gdw. $i \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass der Herausforderer das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle endlichen Signaturen $\sigma \subseteq \tau$ gilt: $\mathfrak{A} \restriction \sigma \cong \mathfrak{B} \restriction \sigma$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass zwischen zwei abzählbaren unendlichen Mengen stets eine bijektive Abbildung existiert.

(c) Verwenden Sie (b), um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gilt.