Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 24.06. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln, für beliebige Formeln φ, ψ, ϑ.

(i) $((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)) \rightarrow (\exists x\vartheta \vee \varphi)$

(ii) $(\neg\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg\varphi(x)) \wedge (\neg\forall x\varphi(x) \vee \neg\exists x\neg\varphi(x))$.

Hinweis: Die Gültigkeit von Formeln entspricht der Gültigkeit gewisser Sequenzen.

(b) Formalisieren Sie in der Prädikatenlogik die Aussage „Der Dorfbarbier c rasiert genau die Männer im Dorf, die sich nicht selbst rasieren.“ und beweisen Sie anhand des Sequenzenkalküls, dass es einen solchen Barbier nicht geben kann. (*Hinweis*: Sie können annehmen, dass das Universum ein Dorf ist.)

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig, für beliebige Formeln φ, ψ?

(i) $\varphi(c) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$, wobei c nicht in φ vorkommt;

(ii) $\forall x\exists y(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \forall x\exists y\varphi \wedge \forall x\exists y\psi$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(i) $\dfrac{\Gamma,\ \varphi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x\varphi(x) \Rightarrow \Delta}$;

(ii) $\dfrac{\Gamma,\ \exists x\psi \Rightarrow \Delta,\ \forall x\varphi}{\Gamma,\ \forall x\psi \Rightarrow \Delta,\ \exists x\varphi}$.

Aufgabe 3 10 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A} = (A, f)$ eine Struktur mit einer einstelligen Funktion $f : A \rightarrow A$ und sei $\sim\, \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A. Sei ferner $R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ der Graph von f. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$, so auch auf der Struktur (A, R_f).

(ii) Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf der Struktur (A, R_f), so auch auf $\mathfrak{A}$.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\sim\, \subseteq A \times A$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ und sei $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}(\tau)$ eine positive Formel. (Das heißt φ ist mit $\vee$, $\wedge$, $\exists$ und $\forall$ aus atomaren Formeln aufgebaut.) Zeigen Sie, dass für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ auch $\mathfrak{A}/\!\sim\, \models \varphi([a_1], \dots, [a_n])$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (b) nicht gilt. Zeigen Sie ferner, dass (b) nicht für beliebige FO-Formeln gilt.

Aufgabe 4* 10* Punkte

Sei $\tau = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine Signatur mit k einstelligen Relationen. Geben Sie eine Funktion $f(k, m)$ an, so daß jede erfüllbare Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ vom Quantorenrang m ein Modell der Größe höchstens $f(k, m)$ hat.

Hinweis. Benutzen Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé.