Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

10. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 1.07. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 10 Punkte

Zeigen Sie, dass in den Regeln ($\exists \Rightarrow$) und ($\Rightarrow \forall$) des Sequenzenkalküls aus dem Skript die Bedingung, dass c nicht in Γ, Δ und ψ vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Beweisen Sie mit dem Vollständigkeitssatz:

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Satzmenge und $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\psi)$. Dann existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

(b) Sei $\mathcal{K} = \{(A, \sim) \mid \sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und jede Äquivalenzklasse ist unendlich $\}$. Geben Sie ein Axiomensystem für die Klasse $\mathcal{K}$ an.

(c) Benutzen Sie Aufgabenteil a) um zu beweisen, dass die Klasse $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3* 10* Punkte

Sei τ eine Signatur und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen. Φ heißt *maximal konsistent*, wenn Φ konsistent ist und jede Satzmenge $\Phi' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $\Phi \subset \Phi'$ und $\Phi \neq \Phi'$ inkonsistent ist. Wir sagen, dass Φ *Zeugen hat*, wenn Φ die folgende Bedingung erfüllt:

Wenn $\exists x\varphi(x) \in \Phi$, dann gibt es einen Grundterm $t \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass $\varphi(t) \in \Phi$ und wenn $\neg\exists x\varphi(x) \in \Phi$, dann gilt für alle Grundterme $t \in \mathrm{FO}(\tau)$, dass $\neg\varphi(t) \in \Phi$.

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen. Beweisen Sie, dass Φ genau dann maximal konsistent ist, wenn Φ eine vollständige Theorie ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Vollständigkeitssatz.

(b) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine maximal konsistente Menge die Zeugen hat. Zeigen Sie, dass dann die Mengen $\Gamma^* := \{\varphi \in \mathrm{FO}(\tau) \mid \varphi \in \Phi\}$, $\Delta^* := \{\varphi \in \mathrm{FO}(\tau) \mid \neg\varphi \in \Phi\}$ die Bedingungen (1)-(5) aus Lemma 4.15 erfüllen.

(c) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen und $T := \{\varphi \in \Phi \mid \varphi$ ist ein atomarer Satz$\}$ und $\Sigma \supseteq T$ der Abschluss von T unter Substitutionen. Zeigen Sie:

Φ ist maximal konsistent und hat Zeugen, genau dann, wenn $\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}(\Sigma))$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie b) und Satz 4.15.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei $\tau = \{0, 1, f, R\}$, wobei $0, 1$ zwei Konstanten sind, f ein 2-stelliges Funktionssymbol, und R ein 1-stelliges Relationssymbol. Wir betrachten die folgende Menge T von atomaren Sätzen:

$$T := \{R0\} \cup \{Rft0 \mid t\ \tau\text{-Term}\} \cup \{fft_1t_2t_3 = ft_1ft_2t_3 \mid t_1, t_2, t_3\ \tau\text{-Terme}\}.$$

Sei Σ die kleinste Menge, die T enthält und unter Substitution abgeschlossen ist, sowie $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)_{/\sim}$.