Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 8.07. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1* — 10* Punkte

Sei (τ) die Klasse der τ-Strukturen, $\mathcal{K} \subseteq (\tau)$ eine Klasse von τ-Strukuren und $\mathcal{K}^c := \{\mathfrak{A} \in (\tau) \,|\, \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\}$ ihr Komplement. Beweisen sie mit dem Kompaktheitssatz, dass $\mathcal{K}$ genau dann endlich axiomatisierbar ist, wenn $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}^c$ beide FO-axiomatisierbar sind.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\Phi_K \cup \Phi_{K^c}$ für Axiomensysteme Φ_K von $\mathcal{K}$ und Φ_{K^c} von $\mathcal{K}^c$.

Aufgabe 2 — 15 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit Hilfe des Kompaktheitssatzes.

(a) Die Klasse der endlichen partiellen Ordnungen $(A, <)$

(b) Die Klasse der unendlichen partiellen Ordnungen $(A, <)$

(c) Die Klasse der unendlichen dichten linearen Ordnungen $(A, <)$

(d) Die Klasse der Wohlordnungen $(A, <)$

(e) Die Klasse der partiellen Ordnungen $(A, <)$ in denen jede Kette nach oben beschränkt ist

(f) Die Klasse der partiellen Ordnungen $(A, <)$ die keine lineare Ordnungen sind

(g) Die Klasse der linearen Ordnungen $(A, <)$ in denen jedes nichtleere Intervall $[a, b) := \{x \,|\, a \leq x < b\}$ unendlich ist

(h) Die Klasse der linearen Ordnungen $(A, <)$ in denen jedes Intervall $[a, b)$ endlich ist

Aufgabe 3 — 15 Punkte

Geben Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils ein (möglichst endliches) Axiomensystem an. Im Fall, dass die Klasse nicht (endlich) FO-axiomatisierbar ist, beweisen Sie dies mit einer Methode Ihrer Wahl.

(a) Die Klasse der zur Booleschen Algebra $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, {}^-, \emptyset, \mathbb{N})$ isomorphen Strukturen

(b) Die Klasse der zum Ring $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ isomorphen Strukturen

(c) Die Klasse aller Strukturen $\mathfrak{A}$, für die eine endliche Menge B existiert, so dass $\mathfrak{A}$ zu $(\mathcal{P}(B), \cup, \cap, {}^-, \emptyset, B)$ isomorph ist

(d) Die Klasse aller Booleschen Algebren, die elementar äquivalent zu $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$ für eine Menge A mit $|A| \leq 3$ sind

(e) Die Klasse $\{(A, R) \mid |R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|\}$

(f) Die Klasse $\{(A, +, 0) \mid (A, +, 0) \equiv_3 (\mathbb{Z}, +, 0)\}$

(g) Die Klasse aller ungerichteten Graphen G, so dass die Klasse aller zu G isomorphen Graphen endlich axiomatisierbar ist

(h) Die Klasse aller Strukturen, die zu einer Herbrandstruktur $\mathfrak{H}$ zur Signatur $\tau := \{c, f\}$ mit Konstantensymbol c und 42-stelligem Funktionssymbol f isomorph sind