Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

SS 2015

12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 15.07. um 14:00 Uhr am Lehrstuhl.

Hinweis: Aufgaben mit einem * können freiwillig bearbeitet werden und geben Zusatzpunkte.

Aufgabe 1* 14* Punkte

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Resolutionsmethode, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg C, F\}, \{E, B, D\}, \{A, C\}, \{\neg B, \neg D\}, \{\neg E\}, \{D, E, \neg F\}, \{\neg A, F\}, \{\neg D, E\}\}$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Formeln jeweils, dass sie äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

(i) $\varphi_i := (X \wedge \neg Y) \vee (Z \wedge \neg X)$

(ii) $\varphi_{ii} := (\neg X \vee (Y \wedge Z)) \wedge (Z \wedge ((X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)))$

(c) Überprüfen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln, ob folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{B,\ E,\ B \wedge G \rightarrow A,\ B \wedge E \rightarrow F,\ F \wedge D \rightarrow G,\ B \wedge F \rightarrow D,\ A \wedge B \rightarrow C\} \models A \vee C$$

Aufgabe 2* 6* Punkte

Wir betrachten die folgenden Strukturen über der Signatur $\tau = \{\circ\}$, wobei $\circ$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist:

$$\mathfrak{A}_1 = (\{0,1\}, \circ),\ \text{mit } a \circ^{\mathfrak{A}_1} b = [\![a \wedge b]\!] = \min(a,b)$$
$$\mathfrak{A}_2 = (\{0,1\}, \circ),\ \text{mit } a \circ^{\mathfrak{A}_2} b = [\![a \vee b]\!] = \max(a,b)$$
$$\mathfrak{A}_3 = (\{0,1\}, \circ),\ \text{mit } a \circ^{\mathfrak{A}_3} b = [\![a \text{ XOR } b]\!] = a + b \mod 2$$

Beweisen oder widerlegen Sie für $i, j \in \{1,2,3\}$ mit $i < j$ jeweils, dass es einen Satz $\varphi_{ij} \in \mathrm{FO}(\tau)$ gibt, mit $\mathfrak{A}_i \models \varphi_{ij}$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_{ij}$.

Aufgabe 3* 10* Punkte

Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen. Wir betrachten die Struktur $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, T)$, wobei $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{Z}$ ist und T die folgende zweistellige Relation ist, die besagt, dass zwei Zahlen genau die gleichen Primzahlen als Teiler haben:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{ für alle } p \in \mathbb{P} \text{ gilt } p|x \text{ gdw. } p|y\}.$$

Hierbei ist die Teilbarkeitsrelation $x|y$ wie üblich definiert, also $x|y$ gilt genau dann, wenn ein $z \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $x \cdot z = y$.

(a) Weisen Sie nach, dass T eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist. Wie viele Elemente liegen in den Äquivalenzklassen der Elemente 0, 1 und 2?

(b) Geben Sie eine FO($\{+, T\}$)-Formel $\varphi(x)$ an, die die Menge $\{-1, 1\}$ in $\mathfrak{Z}$ elementar definiert.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie für die jeweils angegebene Relation R_i, dass sie in $\mathfrak{Z}$ elementar definierbar ist:

   (i) $R_1 = \{(x, y) \mid x < y\}$

   (ii) $R_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2^n \text{ oder } x = -(2^n) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$